Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur la dépendance du convexe de la solution du problème de Cauchy pour un'inéquation parabolique avec convexe dépendant du temps. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.3, p. 293–299.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_3_293_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Analisi matematica. — *Sur la dépendance du convexe de la solution du problème de Cauchy pour un'inéquation parabolique avec convexe dépendant du temps.* Nota I di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si enuncia un teorema di dipendenza continua dal convesso per la soluzione del problema di Cauchy relativo ad una disequazione parabolica con convesso dipendente dal tempo e si dimostrano alcuni risultati preliminari.

§ 1. INTRODUCTION ET ENONCÉS

U. Mosco a donné dans [4], [5] un résultat de dépendence continue du convexe pour la solution des inéquations variationelles elliptiques et l'Auteur a donné dans [1] un résultat de dépendance continue du convexe pour la solution du problème de Cauchy pour des inéquations paraboliques avec convexe indépendent du temps; le but de ce travail est de donner un résultat de dépendance continue du convexe pour la solution du problème de Cauchy pour des inéquations paraboliques dans le cas où les convexes dépendent du temps.

Les méthodes de [1] ne peuvent plus être utilisées dans ce cas et donc on démontrera le résultat par des méthodes completement différentes.

Soit V un espace de Banach uniformément convexe de norme $\| \ \|$, V^* son dual, $\langle \ , \ \rangle$ la dualité entre V et V^*, $\| \ \|^*$ la norme duale sur V^*.

Soit H un espace de Hilbert idéntifié avec son dual pour le produit scalaire $(\ , \ )$ et indiquons par $| \ |$ la norme induite par $(\ , \ )$ sur H.

Nous supposons que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ avec injection dense et continue.

Soit $A(t) : V \to V^*$ un opérateur borné, monotone, hemicontinu pour presque tout $t \in [0, T]$ et avec

$$\langle A(t) v , v \rangle \geq \alpha \|v\|^p - \lambda |v|^2 \tag{1,1}$$

$\forall v \in V$, p.p. sur $[0, T]$ $(\alpha > 0, p \geq 2)$

$$A(t) v \quad \text{mesurable sur} \quad [0, T] \quad \text{dans } V^* \quad \forall v \in V. \tag{1,2}$$

Soient $K_n(t)$ des fonctions de $[0, T]$ dans les parties fermées convexes de V avec retraction $r_n(t)$ et

$$\left| \frac{dr_n}{dt}(t) \right| \leq g(t) \qquad \text{p.p. sur} \quad [0, T] \tag{1,3}$$

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1975.

où $g(t) \in \mathscr{L}^p(0, T)$ (pour la définition de retraction cfr. [3]). Supposons que

$$\lim_{n \to \infty} K_n(t) = K(t) \quad \text{p.p. sur} \quad [0, T] \tag{1,4}$$

$$\lim_{n \to \infty} K_n(0) = K(0) \tag{1,5}$$

au sens de U. Mosco (cfr. [4], [5]). Soit $u_{0n} \in \overline{K_n(0)}^H$ et

$$\lim_{n \to \infty} u_{0n} = u_0 \quad \text{dans} \quad H \tag{1,6}$$

avec $u_0 \in \overline{K(0)}^H$.

Considérons les inéquations d'évolution

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)\, u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \geq \tag{1,7_n}$$

$$\geq \tfrac{1}{2} |v(t_2) - u(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2} |v(t_1) - u(t_1)|^2, \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$$

$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(0, T; V), v'(t) \in \mathscr{L}^2(0, T; H), v(t) \in K_n(t)$ p.p. sur $[0, T]$

$- u(t) \in C(0, T; H) \cap \mathscr{L}^p(0, T; V), u(t) \in K_n(t)$ p.p. sur $[0, T]$,

$u(0) = u_{0n}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)\, u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \geq \tag{1,7}$$

$$\geq \tfrac{1}{2} |v(t_2) - u(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2} |v(t_1) - u(t_1)|^2, \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$$

$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(0, T; V), v'(t) \in \mathscr{L}^2(0, T; H), v(t) \in K(t)$ p.p. sur $[0, T]$

$u(t) \in C(0, T; H) \cap \mathscr{L}^p(0, T; V), u(t) \in K(t)$ p.p. sur $[0, T]$,

$u(0) = u_0$.

THÉORÈME 1. *Le problème* $(1,7_n)$, *a une unique solution* $u_n(t)$ *et on a*

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t)$$

dans $C(0, T; H)$ *et dans la topologie faible de* $\mathscr{L}^p(0, T; V)$ *où* $u(t)$ *est l'unique solution de* (1,7).

Dans le § 2 nous démontrons certains résultats preliminaires, dans le § 3 nous démontrons le Théorème 1 et dans le § 4 nous donnons un exemple d'application.

Remarque 1. Par les mêmes méthodes utilisées pour le Théorème 1 on peut démontrer un résultat analogue pour la solution faible du problème de Cauchy pour un'inéquation du type de Navier–Stokes.

§ 2. RÉSULTATS PRELIMINAIRES

LEMME 1. *Soit* $K(t)$ *comme au Théorème 1 et* $u(t)$ *absolument continue dans* V; *on a*

$$\int_0^t \langle -u'(s), J(u(s) - P_{K(s)} u(s))\rangle \, ds \leq \tag{2,1}$$

$$\leq \tfrac{1}{2} \| u(0) - P_{K(0)} u(0) \|^2 + \int_0^s g(s) \| u(s) - P_{K(s)} u(s) \| \, ds$$

($P_{K(t)} =$ *opérateur de projection sur* $K(t)$ *dans* V).

Nous observons que (2,1) est valable pour chaque convexe $K_n(t)$, donc par passage à la limite on a facilement le résultat.

LEMME 2. *Le probléme* (1,7) *a un'unique solution* $u(t)$.

La démonstration est la même utilisée dans [2] pour le Théorèm 4. Soit $J_p : V \to V^*$ l'application de dualité telle que $\| J_p v \|^* = \| v \|^{p-1}$, $K_n(t)$, $K(t)$, u_{0n}, u_0 comme au Théorèm 1 avec $u_{0n} \in K_n(0)$, $u_0 \in K(0)$ et

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} u_{0n} = u_0 \qquad \text{dans V.}$$

Soit enfin $\{f_n(t)\} \in \mathscr{L}^2(0, T; H)$ telle que:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(0, T; H).$$

LEMME 3. *Considérons les inéquations* ($\eta > 0$, $c > 0$)

$$\begin{aligned} &\langle \eta (u'(t) + c J_p u(t)) + u(t) - f_n(t), v - u(t) \rangle \geq 0 \qquad \text{p.p. sur } [0, T] \\ &\forall v \in K_n(t), \; u(0) = u_{0n}, \; u(t) \in K_n(t) \qquad \text{p.p. } [0, T] \end{aligned} \tag{2,2$_n$}$$

$$\begin{aligned} &\langle \eta (u'(t) + c J_p u(t) + u(t) - f(t), v - u(t) \rangle \geq 0 \qquad \text{p.p. sur } [0, T] \\ &\forall v \in K(t), \; u(0) = u_0 \; ; \; u(t) \in K(t) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]. \end{aligned} \tag{2,2}$$

Indiquons par $u_n(t)$ la solution de $(2,2_n)$ et par $u(t)$ la solution de (2,2); on a

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t)$$

dans $C(0, T; H)$ et $\mathscr{L}^p(0, T; V)$.

Nous observons que d'après [2] et le Lemme 1 on a que (2,2) et $(2,2_n)$ ont une unique solution.

De [3] il y a $w_n(t) \in K_n(t)$ p.p. sur $[0, T]$ avec $w_n(0) = u_{0n}$, $w'_n(t) \in \mathscr{L}^p(0, T; V)$ et

$$\| w'_n(t) \| \leq g(t) \qquad \text{p.p. sur } [0, T].$$

En posant $v(t) = w_n(t)$ dans $(2,2_n)$ on a

$$(2,3) \qquad \eta c \int_0^T \|u_n(t)\|^p \, dt \leq C_1 \quad ; \quad \eta \, |u_n(t)|^2 \leq C_1 .$$

De (2,3) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(2,4) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^p(0, T ; V).$$

De [2] on a aussi

$$(2,5) \qquad \eta \int_0^T |u_n'(t)|^2 \, dt \leq C_2 .$$

De (2,3) (2,5) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(2,6) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* u_n'(t) = u'(t) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^2(0, T ; H)$$

$$(2,7) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad H$$

uniformément sur $[0, T]$.

De (2,4) on a, pour presque tout $\bar{t} \in [0, T]$, $\|u_n(\bar{t})\| \leq C_{\bar{t}}$, dont de (2,7)

$$(2,8) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad V \quad \text{p.p. sur} \quad [0, T].$$

De (2,8) on a

$$(2,9) \qquad u(t) \in K(t) \qquad \text{p.p. sur} \quad [0, T].$$

De (2,4) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(2,10) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* J_p u_n(t) = \chi(t) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^{p'}(0, T ; V^*).$$

De $(2,2_n)$ on a

$$\begin{aligned}
(2,11) \qquad & c\eta \int_0^{\bar{t}} \langle J_p u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle \, dt + \\
& + \int_0^{\bar{t}} \langle u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle \, dt + \tfrac{1}{2} \eta \, |u_n(\bar{t}) - u(\bar{t})|^2 \leq \\
& \leq \int_0^{\bar{t}} \langle \eta (u_n'(t) + c J_p u_n(t)) + u_n(t) - f_n(t), P_{K_n(t)} u(t) - u(t) \rangle \, dt + \\
& + \int_0^{\bar{t}} \langle \eta u_n'(t) - f_n(t), u(t) - u_n(t) \rangle \, dt + \tfrac{1}{2} \eta \, |u(\bar{t}) - P_{K_n(\bar{t})} u(\bar{t})|^2 + \\
& + \tfrac{1}{2} \eta \, |u_{0n} - u_0|^2 + \tfrac{1}{2} \eta \, |u_0 - P_{K_n(0)} u_0|^2 .
\end{aligned}$$

De (2,9) on a

$$(2,12) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{K}_n(t)}\, u(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^p(0, \mathrm{T}; \mathrm{V})$$

et de [5] on a

$$(2,13) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{K}_n(0)}\, u_0 = u_0 \qquad \text{dans} \quad \mathrm{V}.$$

De (2,11) (2,12) (2,13) on a alors

$$(2,14) \qquad \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans H} \quad \text{p.p. sur} \quad [0, \mathrm{T}]$$

$$(2,15) \qquad \limsup_{n\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} \langle \mathrm{J_P}\, u_n(t), u_n(t) - u(t)\rangle\, \mathrm{d}t \leq 0.$$

De (2,5) (2,14) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(2,16) \qquad \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}).$$

De (2,4) et (2,15) on a

$$(2,17) \qquad \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^p(0, \mathrm{T}; \mathrm{V}) \quad , \quad \chi(t) = \mathrm{J}_p\, u(t).$$

De (2,6) (2,10) (2,16) (2,17) on a alors que $u(t)$ est l'unique solution de (2,2). Le résultat est ainsi démontré.

LEMME 4. *Soient vérifiées les hypothèses du Théorème 1 sur* $\mathrm{A}(t)$, $f(t)$ *et soit* $\mathrm{K}(t)$ *une fonction de* $[0, \mathrm{T}]$ *dans les parties fermées convexes de* V *de retraction* $r(t)$ *avec* $r'(t) \in \mathscr{L}^p(0, \mathrm{T})$. *Soit* $u_i(t)$ *une solution de l'inéquation*

$$(2,18) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + \mathrm{A}(t)\, u(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle\, \mathrm{d}t \geq \tfrac{1}{2}\, |v(t_2) - u(t_2)|^2 -$$

$$- \tfrac{1}{2}\, |v(t_1) - u(t_1)|^2 \qquad [0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \mathrm{T}] \qquad \forall v(t) \in \mathrm{E}$$

$$u(t) \in \mathscr{L}^p(0, \mathrm{T}; \mathrm{V}) \cap \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}) \quad , \quad u(t) \in \mathrm{K}(t)$$

$$\text{p.p. sur} \quad [0, \mathrm{T}] \quad , \quad u(0) = u_{0i}$$

où $u_{0i} \in \mathrm{K}(0)$, $i = 1, 2$ *et* E *est l'ensemble des solutions des problèmes*

$$(2,19) \qquad \langle \eta(u'_\eta(t) + c\,\mathrm{J_P}\, u_\eta(t)) + u_\eta(t) - w(t), v - u_\eta(t)\rangle \geq 0 \qquad \text{p.p. sur} \quad [0, \mathrm{T}]$$

$$\forall v \in \mathrm{K}(t) \quad , \quad u_\eta(t) \in \mathrm{K}(t) \qquad \text{p.p. sur} \quad [0, \mathrm{T}] \quad , \quad u_\eta(0) = \bar{u}$$

avec $w(t) \in \mathscr{L}^p(0, \mathrm{T}, \mathrm{V})$, $\bar{u} \in \mathrm{K}(0)$.

On a

$$\tfrac{1}{2}\, |u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq \tfrac{1}{2}\, |u_{01} - u_{02}|^2.$$

Posons dans (2,19) $w(t) = \frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t))$ et $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_{01} + u_{02})$ et indiquons par $w_\eta(t)$ la solution correspondante de (2,19); on a

$$\langle w'_\eta(t) + c\mathrm{J}_p w_\eta(t), w_\eta(t) - w(t)\rangle \leq 0. \tag{2,20}$$

Posons $v(t) = w_\eta(t)$ dans (2,18); on a

$$\int_0^{\bar{t}} \{\langle w'_\eta(t) + c\mathrm{J}_p w_\eta(t), w_\eta(t) - w(t)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \mathrm{A}(t) u_1(t), w_\eta(t) - u_1(t)\rangle +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\langle \mathrm{A}(t) u_2(t), w_\eta(t) - u_2(t)\rangle + \langle f(t), w_\eta\rangle(t) - w(t)\}\,\mathrm{d}t \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2}(|w_\eta(\bar{t}) - u_1(\bar{t})|^2 + |w_\eta(\bar{t}) - u_2(\bar{t})|^2) -$$

$$- \tfrac{1}{2}|u_{01} - u_{02}|^2 + \int_0^{\bar{t}} \langle c\mathrm{J}_p w_\eta(t), w_\eta(t) - w(t)\rangle\,\mathrm{d}t.$$

De (2,20) on a alors facilement

$$\int_0^{\mathrm{T}} \|w_\eta(t)\|^p\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{C}_1. \tag{2,21}$$

On sait, [2], que

$$\lim_{\eta\to 0} w_\eta(t) = w(t) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}) \tag{2,22}$$

donc de (2,21) on peut supposer

$$\lim_{\eta\to 0}{}^{*} w_\eta(t) = w(t) \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^p(0, \mathrm{T}; \mathrm{V}). \tag{2,23}$$

De (2,22) (2,23) en passant à la limite pour $\eta \to 0$ on a alors le résultat.

Remarque 1. Par le Lemme 4 on peut donner facilement un autre démonstration de l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour un'inéquation parabolique; ce résultat a été déjà démontré par d'autres moyens dans [2].

LEMME 5. *Soient* $\mathrm{A}(t), f(t), \mathrm{K}(t), \mathrm{E}$ *comme au Lemme 4,* $u_0 \in \mathrm{K}(0)$. *Les problèmes*:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + \mathrm{A}(t) u(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t \geq \tfrac{1}{2}|v(t_2) - u(t_2)|^2 -$$

$$- \tfrac{1}{2}|v(t_1) - u(t_1)|^2 \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \mathrm{T} \qquad \forall v(t) \in \mathrm{E}$$

$$u(t) \in \mathscr{L}^p(0, \mathrm{T}; \mathrm{V}) \cap \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}) \quad , \quad u(t) \in \mathrm{K}(t)$$

$$\text{p.p. sur} \quad [0, \mathrm{T}] \quad , \quad u(0) = u_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)\, u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |v(t_2) - u(t_2)|^2 - \frac{1}{2} |v(t_1) - u(t_1)|^2, \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$$

$$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(0, T; V) \quad , \quad v'(t) \in \mathscr{L}^2(0, T; H) \quad , \quad v(t) \in K(t)$$

$$\text{p.p. sur} \quad [0, T].$$

$$u(t) \in \mathscr{L}^p(0, T; V) \cap C(0, T : H) \quad , \quad u(t) \in K(t)$$

$$\text{p.p. sur} \quad [0, T] \quad , \quad u(0) = u_0$$

sont equivalentes.

Le résultat est une facile consequence du Lemme 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BIROLI (1961) – *Sulle diseguaglianze d'evoluzione: teoremi di dipendenza continua*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », *103*, 1027–1051.

[2] M. BIROLI (1974) – *Sur les inéquations paraboliques avec convexe dépendant du temps: solution forte et solution faible*. A paraître « Rend. Univ. Parma ».

[3] J. J. MOREAU (1972) – *Estraction d'une multiapplication*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, Exposé 13, 89.

[4] U. MOSCO (1967) – *Approximation of solution of variational inequalities*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *20*, 373–393.

[5] U. MOSCO (1969) – *Convergence of solutions of variational inequalities. Theory and application of monotone operators*. Oderisi–Gubbio.