Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Congedo, Antonio Leopore

Su un sistema di equazioni integrali di Volterra di prima specie non riconducibile ad uno di seconda specie. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.3, p. 284–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_3_284_0>

Analisi matematica. — *Su un sistema di equazioni integrali di Volterra di prima specie non riconducibile ad uno di seconda specie.* Nota I di GIUSEPPE CONGEDO e ANTONIO LEPORE, presentata [*] dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — The system of integral equations (2) is investigated by two different methods. Theorems concerning uniqueness, existence and representation of the solution are obtained.

La prof. M. A. Sneider in un recente lavoro [1] studia, fra l'altro, l'equazione integrale di Volterra di prima specie

$$\psi(x) + \int_0^x \varphi\left(\frac{t}{x}\right) u(t)\,\mathrm{d}t = 0\,, \tag{1}$$

ove $\varphi(s)$ è una funzione definita in $[0, 1]$, verificante opportune ipotesi; l'incognita $u(x)$ è ricercata in classi di funzioni definite nell'intervallo $[0, x_0]$ dell'asse x.

Lo studio di tale equazione è interessante, oltre che per le applicazioni concernenti l'Astrofisica, anche perché alla (1) non è applicabile il ben noto procedimento che riconduce un'equazione integrale di Volterra di prima specie ad una di seconda specie [2].

La prof. Sneider impiega tre diversi metodi per l'indagine della (1). Il primo è essenzialmente fondato su un procedimento che riconduce la (1) ad una equazione alla quale può applicarsi il principio di contrazione. Il secondo ricerca soluzioni analitiche della (1) e, supposta tale la $\psi(x)$, permette di ottenere l'incognita $u(x)$ mediante uno sviluppo in serie di potenze. Infine il terzo metodo si serve della trasformazione di Mellin e fornisce la soluzione mediante una «formula chiusa».

Lo scopo del presente lavoro è di far vedere che tutti i procedimenti elaborati dalla prof. Sneider si lasciano estendere allo studio del sistema di equazioni integrali di prima specie (non riconducibile ad uno di seconda specie)

$$\psi_h(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \varphi_{hk}\left(\frac{t}{x}\right) u_k(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1975.

(1) M. A. SNEIDER LUDOVICI, *Saggio di una teoria per un'equazione integro-differenziale che interessa la dinamica delle galassie*, «Rendiconti di Matematica», 6 (4), Ser. VI (1973).

(2) Cfr. F. TRICOMI, *Integral Equations*, Interscience Publishers, Inc. New York 1957.

per il quale si ottengono risultati perfettamente analoghi a quelli dell'Autrice citata.

Prima d'intraprendere la nostra indagine, avvertiamo che, se con φ indichiamo la matrice ad elementi reali $\{\varphi_{hk}\}$ $(h, k = 1, 2, \cdots, n)$, e con u il vettore a componenti reali $\{u_h\}$ $(h = 1, 2, \cdots, n)$, con φu denotiamo il vettore la cui componente h-esima è $\sum_{k=1}^{n} \varphi_{hk} u_k$. Inoltre, se con $|u|$ indichiamo il modulo del vettore u, cioè

$$|u| = \left[\sum_{h=1}^{n} u_h^2\right]^{1/2},$$

con $|\varphi|$ denotiamo il modulo della matrice $\{\varphi_{hk}\}$ definito nel modo seguente

$$|\varphi| = \sup_{|u|=1} |\varphi u| . \tag{3}$$

Volendo può assumersi $|\varphi|$, anzicchè definito dalla (3), come modulo di Frobenius della matrice φ. Può porsi cioè

$$|\varphi| = \left[\sum_{h,k}^{1,n} \varphi_{hk}^2\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Definire $|\varphi|$ mediante la (3) o la (4) è del tutto inessenziale ai fini della nostra analisi.

Gli autori della presente Nota I e della successiva Nota II hanno lavorato in stretta collaborazione, talché non appare facile separare nettamente i contributi dell'uno da quelli dell'altro. Tuttavia, mentre Giuseppe Congedo si è principalmente interessato degli argomenti contenuti nella Nota I, Antonio Lepore ha prevalentemente curato gli argomenti contenuti nella Nota II.

1. PRIMO METODO DI SOLUZIONE DEL SISTEMA (2)

Consideriamo il sistema:

$$\psi(x) + \int_0^x \varphi\left(\frac{t}{x}\right) u(t)\, dt = 0 \tag{1.1}$$

nella funzione incognita $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x))$, con le seguenti ipotesi:

1) $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)) \in C^1[0, x_0]$, con x_0 reale positivo assegnato;

2) $\varphi(s) = \{\varphi_{hk}(s)\}$, $h, k = 1, 2, \cdots, n$, assolutamente continua in $[0, 1]$ e tale che $|\varphi(s)|$ non è identicamente nulla in $[0, 1]$.

Il sistema (1.1) non è riconducibile ad un sistema di equazioni integrali di Volterra di II specie.

Evidentemente, condizione necessaria perché il sistema (1.1) ammetta soluzione. è che sia:

$$\psi(0) = 0 . \tag{1.2}$$

Il sistema (1.1) è equivalente al sistema

$$\psi(x) + x \int_0^1 \varphi(s)\, u(sx)\, ds = 0 . \tag{1.1'}$$

Sussiste il seguente teorema:

I) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $u \in C^0[0, x_0]$ *sia soluzione di* (1.1) *in* $[0, x_0]$, *è che* $u(x)$ *sia ivi soluzione del sistema*

$$\psi'(x) + \varphi(1)\, u(x) - \int_0^1 s\varphi'(s)\, u(sx)\, ds = 0. \tag{1.3}$$

La condizione è sufficiente. Infatti, integrando fra 0 e x i due membri della (1.3), si ha:

$$\psi(x) + \varphi(1) \int_0^x u(\xi)\, d\xi - \int_0^1 s\varphi'(s)\, ds \int_0^x u(s\xi)\, d\xi = 0 . \tag{1.4}$$

Ponendo nell'ultimo integrale $t = s\xi$ la (1.4) diventa

$$\psi(x) + \varphi(1) \int_0^x u(\xi)\, d\xi - \int_0^1 \varphi'(s)\, ds \int_0^{sx} u(t)\, dt = 0 , \tag{1.5}$$

dalla quale, mediante un'integrazione per parti si ottiene la (1.1').

La condizione è necessaria. Infatti, se $x \neq 0$, derivando rispetto a x i due membri della (1.1), si ha:

$$\psi'(x) + \varphi(1)\, u(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x t\varphi'\left(\frac{t}{x}\right) u(t)\, dt = 0 . \tag{1.6}$$

Ponendo nell'ultimo integrale $t = sx$, si ottiene la (1.3) per $x \neq 0$. Ma, essendo il I membro di (1.3) una funzione continua di x in $[0, x_0]$, la (1.3) sussiste anche per $x = 0$.

Supponiamo ora che $\psi \in C^{m+1}[0, x_0]$, con $m > 0$, che $u \in C^m[0, x_0]$ sia soluzione di (1.3), e poniamo $v(x) = u^{(m)}(x)$. Derivando m volte i due membri della (1.3) rispetto ad x, si ottiene:

$$\psi^{(m+1)}(x) + \varphi(1)\, v(x) - \int_0^1 s^{m+1}\, \varphi'(s)\, v(sx)\, ds = 0 . \tag{1.3$_m$}$$

Consegue che, se $u \in C^m [0, x_0]$ ($m \geq 0$) è soluzione di (1.3), $v \in C^0 [0, x_0]$ è soluzione di (1.3_m).

Alle ipotesi 1) e 2) aggiungiamo l'ulteriore condizione:

3) $\det \varphi(1) \neq 0$.

Allora, la matrice $\varphi(1)$ è dotata d'inversa, e, poiché

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^1 s^{m+1} |\varphi'(s)| \, ds = 0$$

esiste $m \in N$ tale che

$$\int_0^1 s^{m+1} |\varphi'(s)| \, ds < \frac{1}{|\varphi^{-1}(1)|} . \tag{1.7}$$

Sussiste il seguente teorema

II) *Se sono verificate le ipotesi* 1), 2), (1.2), 3) *e se* $\psi \in C^{m+1} [0, x_0]$, *con m tale che sia verificata la* (1.7), *esiste in* $C^0 [0, x_0]$, *una ed una sola soluzione v di* (1.3_m).

Se poniamo

$$Lv = -\varphi^{-1}(1) \psi^{(m+1)}(x) + \varphi^{-1}(1) \int_0^1 s^{m+1} \varphi'(s) \, v(sx) \, ds ,$$

e

$$L_0 v = \varphi^{-1}(1) \int_0^1 s^{m+1} \varphi'(s) \, v(sx) \, ds ,$$

si ha che L_0 è una trasformazione lineare dello spazio di Banach $C^0 [0, x_0]$ in sè. Inoltre se v, w appartengono a $C^0 [0, x_0]$, risulta:

$$|Lv - Lw| = |L_0 v - L_0 w| \leq |\varphi^{-1}(1)| \int_0^1 s^{m+1} |\varphi'(s)| \, |v(sx) - w(sx)| \, ds \leq$$

$$q \cdot \max_{x \in [0, x_0]} |v(x) - w(x)| ; \qquad \text{con} \quad q = |\varphi^{-1}(1)| \int_0^1 s^{m+1} |\varphi'(s)| \, ds .$$

Essendo, per la (1.7), $1 > q$, L è una contrazione in $C^0 [0, x_0]$, quindi, per il principio di contrazione, esiste una ed una sola v trasformata in sé dalla L, ossia esiste una ed una sola $v \in C^0 [0, x_0]$ soluzione di (1.3_m).

Per lo stesso principio di contrazione, posto $v^{(0)}(x) = -\varphi^{-1}(1)\,\psi^{(m+1)}(x)$, si ha: $v^{(1)} = L_0 v^{(0)} + v^{(0)}$; $v^{(2)} = Lv^{(1)} = L_0^2 v^{(0)} + L_0 v^{(0)} + v^{(0)}$; e in generale: $v^{(k+1)} = Lv^{(k)} = L_0^k v^{(0)} + L_0^{k-1} v^{(0)} + \cdots + L_0 v^{(0)} + v^{(0)}$, dove

$$L_0^k v^{(0)} = -\varphi^{-1}(1) \int_0^1 s_k^{m+1} \varphi'(s_k)\, ds_k\, \varphi^{-1}(1) \cdots$$

$$\cdots \varphi^{-1}(1) \int_0^1 s_2^{m+1} \varphi'(s_2)\, ds_2\, \varphi^{-1}(1) \int_0^1 s_1^{m+1} \varphi'(s_1)\, \varphi^{-1}(1)\, \psi^{(m+1)}(s_1 s_2 \cdots s_k x)\, ds_1 ;$$

e la soluzione $v(x)$ della (1.3_m) è data dalla serie:

$$v(x) = v^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_0^k v^{(0)}(x) \tag{1.8}$$

uniformemente convergente in $[0, x_0]$.

Si ha poi la seguente maggiorazione:

$$|v(x)| \le \max_{[0,x_0]} |\varphi^{-1}(1)\,\psi^{(m+1)}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot \max_{[0,x_0]} |\varphi^{-1}(1)\,\psi^{(m+1)}(x)| =$$

$$\max_{[0,x_0]} |\varphi^{-1}(1)\,\psi^{(m+1)}(x)| \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - |\varphi^{-1}(1)| \int_0^1 s^{m+1} |\varphi'(s)|\, ds} \max_{[0,x_0]} |\varphi^{-1}(1)\,\psi^{m+1}(x)| .$$

Se $m = 0$ la funzione $u(x) = v(x)$ è soluzione di (1.3_0) ossia di (1.3) e, per il teorema I, anche di (1.1).

Sia $m > 0$ e supponiamo che esista $u \in C^m[0, x_0]$, soluzione di (1.3). Posto

$$U(x) = \int_0^x u(\xi)\, d\xi \tag{1.9}$$

si ha:

$$U(x) = \sum_{k=1}^{m} x^k a^{(k)} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} v(\xi)\, d\xi , \tag{1.10}$$

dove $U(x) = (U_1(x), U_2(x), \cdots, U_n(x))$ e $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \cdots, a_n^{(k)})$.

Supposto che la funzione $v(x)$ sia soluzione di (1.3_m), ci proponiamo di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare la $\psi(x)$ affinchè possano determinarsi i vettori $a^{(k)}$ in modo che la funzione $u(x) = U'(x)$ sia soluzione di (1.3) ovvero della (1.1').

Notiamo che, per $0 \le s \le 1$, dalla (1.10) si ha:

$$U(sx) = \sum_{k=1}^{m} s^k x^k a^{(k)} + \int_0^{sx} \frac{(sx-\xi)^m}{m!} v(\xi)\, d\xi , \tag{1.11}$$

da cui, posto $\xi = st$ risulta:

$$\mathrm{U}(sx) = \sum_{k=1}^{m} s^k x^k a^{(k)} + s^{m+1} \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} v(s\xi)\, d\xi . \tag{1.12}$$

Si ha inoltre:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} x^k \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} \psi^{(m+1)}(\xi)\, d\xi . \tag{1.13}$$

Poichè abbiamo supposto che $v(x) \in C^0[0, x_0]$ è soluzione di (1.3_m), ricavando da questa $\psi^{(m+1)}(x)$ e sostituendo nella (1.13) si ha:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} x^k \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} - \varphi(1) \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} v(\xi)\, d\xi + \tag{1.14}$$

$$+ \int_0^1 s^{m+1} \varphi'(s)\, ds \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} v(s\xi)\, d\xi .$$

Per le (1.9), (1.10), (1.12), la (1.14) diventa:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} x^k \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} + \varphi(1) \sum_{k=1}^{m} x^k a^{(k)} - \int_0^1 \varphi'(s) \sum_{k=1}^{m} s^k x^k a^{(k)}\, ds +$$

$$+ \int_0^1 \left[\varphi'(s) \int_0^{sx} u(\xi)\, d\xi\right] ds - \varphi(1) \int_0^x u(\xi)\, d\xi .$$

Integrando per parti e ponendo $b^{(k)} = k a^{(k)}$, si ha, identicamente rispetto ad x,

$$\psi(x) + x \int_0^1 \varphi(s)\, u(sx)\, ds = \sum_{k=1}^{m} x^k \int_0^1 s^{k-1} \varphi(s)\, b^{(k)}\, ds + \sum_{k=1}^{m} x^k \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} .$$

Ne consegue che $u(x)$ è soluzione in $[0, x_0]$ di (1.1′) se e solo se:

$$\int_0^1 s^{k-1} \varphi(s)\, ds\, b^{(k)} = -\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \text{per} \quad k = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.15}$$

Si perviene così al seguente teorema:

III) *Sia* $\psi \in C^{m+1}[0, x_0]$, *con* $\psi(0) = 0$. *Sia* $\varphi(s)$ *assolutamente continua in* $[0, 1]$ *e con* $\det \varphi(1) \neq 0$. *Sia* $m > 0$ *tale che sia soddisfatta la* (1.7). *Se*

$$\det \int_0^1 s^{k-1} \varphi(s)\, ds \neq 0 \qquad \text{per} \quad k = 1, 2, \cdots, m,$$

il sistema (1.1) *ammette una ed una sola soluzione* $u \in C^m [0, x_0]$. *Essa è data da*:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} x^{k-1} b^{(k)} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} v(\xi) \, d\xi , \tag{1.16}$$

con i vettori $b^{(k)}$ *determinati dai sistemi* (1.15), *e* $v(x)$ *data dalla* (1.8).

Se per $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leq m$ *risulta*

$$\det \int_0^1 s^{k_i - 1} \varphi(s) \, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

i relativi sistemi (1.15) *hanno soluzioni (infinite) in* $b^{(k_i)}$, *se e solo se le corrispondenti matrici complete hanno la stessa caratteristica delle matrici dei coefficienti. In tal caso i vettori* $b^{(k)}$ *con* $k \neq k_i$ *sono univocamente determinati dai sistemi* (1.15), *mentre i vettori* $b^{(k_i)}$ *hanno infinite determinazioni.*

La (1.16) *dà anche in questo caso, la più generale soluzione di* (1.1).

2. Soluzione analitica di (1.1)

Sia $\Omega(x_0)$ l'insieme delle funzioni vettoriali della variabile complessa z, olomorfe in un campo connesso contenente il disco $|z| \leq x_0$. Sia $\psi \in \Omega(x_0)$, con $\psi(0) = 0$. Allora anche la funzione:

$$\rho(z) = -\frac{\psi(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \rho^{(k)} , \tag{2.1}$$

appartiene a $\Omega(x_0)$.

Sebbene molti dei risultati che otterremo sussistono anche se le funzioni che consideriamo sono a valori complessi, per noi hanno interesse soltanto le funzioni di $\Omega(x_0)$ che assumono valori reali per valori reali della variabile complessa z, pertanto noi faremo riferimento soltanto a tali funzioni.

Sussiste il seguente teorema:

IV) *Sia* $\det \varphi(1) \neq 0$. *Sia* $\rho(z) \in \Omega(x_0)$. *Il sistema*

$$\int_0^1 \varphi(s) \, u(sz) \, ds = \rho(z) \tag{2.2}$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in \Omega(x_0)$ *se e solo se*

$$\det \int_0^1 s^k \varphi(s) \, ds \neq 0 \qquad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.3}$$

In tal caso la soluzione $u(z)$ è data dallo sviluppo in serie

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \alpha^{(k)} \tag{2.4}$$

con i vettori $\alpha^{(k)} = (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \cdots, \alpha_n^{(k)})$ *determinati dai sistemi*

$$\left[\int_0^1 s^k \varphi(s) \, ds \right] \alpha^{(k)} = \rho^{(k)}. \tag{2.5}$$

Se $k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \cdots$ *sono tutti e soli gli interi non negativi per i quali risulta*

$$\det \int_0^1 s^{k_j} \varphi(s) \, ds = 0 \, , \tag{2.6}$$

allora i corrispondenti sistemi (2.5) *hanno soluzioni in* $\alpha^{(k_j)}$, *se e solo se le relative matrici complete hanno la stessa caratteristica delle matrici dei coefficienti. In tal caso il sistema* (2.2) *ha soluzione della forma* (2.4), *dove i vettori* $\alpha^{(k)}$ *con* $k \neq k_j$, *sono univocamente determinati, mentre i vettori* $\alpha^{(k)}$, *con* $k = k_j$, *hanno infinite determinazioni. Di tali determinazioni devono essere scelte quelle per le quali la corrispondente serie* (2.4) *ha raggio di convergenza maggiore di* x_0.

Cominciamo a supporre che sussista la (2.3) per ogni k.

Che le (2.4), con i vettori $\alpha^{(k)}$ dati dai sistemi (2.5), forniscano soluzioni di (2.2) si verifica immediatamente sostituendo la u data dalla (2.4) nella (2.2), tenendo conto della (2.1). Pertanto tutto si riduce a dimostrare che la serie (2.4) ha raggio di convergenza maggiore o uguale di x_0.

Dalla (2.5) si ha:

$$\alpha^{(k)} = \left[\int_0^1 s^k \varphi(s) \, ds \right]^{-1} \rho^{(k)} \, ,$$

e quindi

$$|\alpha^{(k)}| \leq \left| \left[\int_0^1 s^k \varphi(s) \, ds \right]^{-1} \right| |\rho^{(k)}| = \left| \left[\varphi(1) - \int_0^1 s^{k+1} \varphi'(s) \, ds \right]^{-1} \right| |\rho^{(k)}| \frac{1}{k+1} \cdot$$

Dato che

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 s^{k+1} \varphi'(s) \, ds = 0 \, ,$$

si ha:

$$\lim_{k \to \infty} \left[\varphi(1) - \int_0^1 s^{k+1} \varphi'(s) \, ds \right] = \varphi(1)$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\left[\varphi(1)-\int_0^1 s^{k+1}\varphi'(s)\,ds\right]^{-1}=\varphi^{-1}(1).$$

Pertanto sarà definitivamente

$$\left|\left[\varphi(1)-\int_0^1 s^{k+1}\varphi'(s)\,ds\right]^{-1}\right|<\frac{3}{2}\,|\varphi^{-1}(1)|.$$

Posto

$$\frac{1}{r}=\lim_{k\to\infty}{}''\,|\alpha^{(k)}|^{1/k},$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{r}<\lim_{k\to\infty}{}''\left(\frac{3}{2}\right)^{1/k}\cdot|\varphi^{-1}(1)|^{1/k}\,|\rho^{(k)}|^{1/k}\frac{1}{[k+1]^{1/k}}=\lim_{k-\infty}{}''\,|\rho^{(k)}|^{1/k}.$$

Poichè $\rho\in\Omega(x_0)$, detto ρ'' il raggio di convergenza della serie (2.1), si ha $\rho''\geq x_0$, e quindi $\lim\limits_{k\to\infty}{}''\,|\rho^{(k)}|^{1/k}\leq\frac{1}{x_0}$.

Pertanto si ha:

$$\frac{1}{r}\leq\frac{1}{x_0}\qquad\text{ossia}\quad r\geq x_0.$$

È così dimostrato che la serie (2.4) ha raggio di convergenza non minore di x_0.

La dimostrazione della seconda parte del teorema relativa al caso (2.6) è ovvia conseguenza di ben noti teoremi sui sistemi di equazioni lineari.