Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fernando de Felice

Analogia fra campi gravitazionali e campi elettro-magnetici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.2, p. 231–236.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_2_231_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Fisica. — *Analogia fra campi gravitazionali e campi elettromagnetici* (*). Nota di FERNANDO DE FELICE, presentata (**) dal Socio A. ROSTAGNI.

SUMMARY. — The geodesic motion in a gravitational field is analyzed with the use of the transverse and parallel projection operators with respect to the stationary observer.

It is found that the test body moves as an electric charge in an electromagnetic field in analogy with classical electrodynamics.

La legge Newtoniana di interazione gravitazionale fra due corpi è notoriamente simile a quella coulombiana fra due cariche di segno contrario. Nella teoria della Relatività Generale questa analogia sembra perdersi a causa del formalismo complesso e poco accessibile alla intuizione fisica immediata; tuttavia una analisi accurata permette di riscoprire una similarità insospettata fra gravitazione ed elettromagnetismo.

Dato uno spazio–tempo S_4 con una metrica g_{ij}, di segnatura $+2$, consideriamo un corpo di massa μ, in caduta libera lungo una geodetica Γ_k di vettore tangente $k^i = \frac{dx^i}{d\sigma_k}$. Riferiamo questo moto, per altro arbitrario, ad un osservatore particolare, definito dalla linea Universo Γ_u di vettore tangente (1)

$$u^i = \frac{dx^i}{d\sigma_u} = \frac{\delta^i_0}{\sqrt{-g_{00}}} \qquad i, j = 1, 2, 3, 0. \tag{1}$$

I parametri su Γ_k e Γ_u sono scelti in modo da rappresentare i rispettivi tempi propri (2). L'osservatore in (1) è detto stazionario e la sua linea Universo è, per definizione, tangente in ogni punto all'asse dei tempi ivi definito. u^i è un osservatore fisico finchè Γ_u è di tipo tempo, cioè ovunque sia $g_{00} < 0$.

Sia h_{ij} l'operatore di proiezione trasversa, relativo ad u^i, e definito come [2]:

$$h_{ij} = g_{ij} + u_i u_j . \tag{2}$$

Esso gode delle seguenti proprietà:

$$h_{ij} w^j = \underset{\perp}{w_i} \Rightarrow \underset{\perp}{w_i}\, u^i = 0 \tag{3}$$

(*) Lavoro compiuto sotto gli auspici del Comitato Nazionale Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1975.

(1) Gli indici latini vanno da 0 a 3, quelli greci da 1 a 3.

(2) Ciò implica: $u^i u_i = -1$; $k^i k_i = -1$.

per ogni 4-vettore w^i di S_4; ed ancora:

(4)
$$h_{ij}\, h^j_k = h_{ik}$$
$$h_{ij}\, u^j = 0 \Rightarrow h_{\alpha 0} = h_{00} = 0 \qquad \alpha = 1\,,2\,,3 .$$

Ricordando che, per definizione di geodetica, si ha [3]:

(5)
$$k_{i\,;\,j}\, k^j = 0\,,$$

la proiezione trasversa di (5) nello spazio ortogonale (o sistema a riposo) di u^i vale:

(6)
$$h^i_\alpha\, k_{i\,;\,j}\, k^j = 0\,.$$

Sviluppando (6), si ottiene:

(7)
$$h^i_\alpha \frac{dk_i}{d\sigma_k} = \frac{1}{2}\,(u^i\, k_i)^2\,[\beta^r \beta^s\, \partial_\alpha h_{rs} + u^r u^s\, \partial_\alpha g_{rs} + 2\beta^r u^s\, \partial_\alpha g_{rs} + $$
$$+ \beta^r \beta^s\, u_\alpha u^l\, \partial_l h_{rs} + u^r u^s\, u_\alpha u^l\, \partial_l g_{rs} + 2\beta^r u^s\, u_\alpha u^l\, \partial_l g_{rs}],$$

dove si è usata la ben nota relazione [1]:

(8)
$$\beta^i = \frac{v^i}{c} = -(u^r k_r)^{-1} h^i_j\, k^j,$$

con v^i velocità spaziale del corpo rispetto ad u^i.

Ricordando che, ancora rispetto ad u^i, la derivata parziale «spaziale» è [3]:

(9)
$$\tilde{\partial}_\alpha = \partial_\alpha + u_\alpha\, u^\rho\, \partial_\rho\,, \qquad \alpha\,,\rho = 1\,,2\,,3$$

(7) diviene:

(10)
$$h^i_\alpha \frac{dk_i}{d\sigma_k} = \frac{1}{2}\,(u^r k_r)^2\,[\beta^r \beta^s\, \tilde{\partial}_\alpha h_{rs} + u^r u^s\, \tilde{\partial}_\alpha g_{rs} + 2\beta^r u^s\, \tilde{\partial}_\alpha g_{rs}].$$

Da (8), con ovvî passaggi, si ha:

(11)
$$k_i = \frac{\tilde{p}_i}{\mu c} - u_i\,(u^r k_r)$$

dove $\tilde{p}_i$ è il tetramomento «spaziale» del corpo, rispetto ad u^i; differenziando rispetto a σ_k si ha:

(12)
$$\frac{dk_i}{d\sigma_k} = \frac{1}{\mu c}\frac{d\tilde{p}_i}{d\sigma_k} - u_i \frac{d}{d\sigma_k}(u^r k_r) - (u^r h_r)\frac{du_i}{d\sigma_k}\,;$$

(3) $k_{i\,;\,j}\, k^j = \dfrac{dk_i}{d\sigma_k} - \dfrac{1}{2}\, k^r\,(\partial_i g_{jr} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij}) \quad ; \quad \partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^i}\,.$

il termine a sinistra di (10) diviene quindi [4]:

$$h^i_\alpha \frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}\sigma_k} = \frac{1}{\mu c}\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_k} - u_\alpha k_r \frac{\mathrm{d}u^r}{\mathrm{d}\sigma_k} - (u^r k_r)\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_k}. \tag{13}$$

Tenendo conto di (8), (13) diviene:

$$h^i_\alpha \frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}\sigma_k} = -\frac{1}{\mu c}(u^i k_i)\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_u} + (u_i k^i)\, u_\alpha k_j (\beta^r + u^r)\, \partial_r u^j + \tag{14}$$
$$+ (u_i k^i)^2 (\beta^r + u^r)\, \partial_r u_\alpha .$$

Da (1) e, ricordando che vale:

$$k_0 = -u_0 (u^r k_r), \tag{15}$$

si ha infine:

$$h^i_\alpha \frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}\sigma_k} = -\frac{1}{\mu c}(u^r k_r)\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_u} - u_\alpha u_0 (u^r k_r)^2 (\beta^i + u^i)\, \partial_i u^0 + \tag{16}$$
$$+ (u^r k_r)^2 (\beta^i + u^i)\, \partial_i u_\alpha .$$

Sostituendo (16) in (10), si ha, con opportune semplificazioni:

$$\left[\frac{1}{\mu c}\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_u} + \frac{1}{2}(u^r k_r)\, \beta^\rho \beta^\sigma \tilde{\partial}_\alpha h_{\rho\sigma}\right] + (u^r k_r) \times \tag{17}$$
$$\times [-\beta^i \partial_i u_\alpha - u^i \partial_i u_\alpha - u_\alpha u_0 (\beta^i + u^i)\, \partial_i u^0 + u^i \tilde{\partial}_\alpha u_i + \beta^i \tilde{\partial}_\alpha u_i] = 0 .$$

I primi due termini in (17) si scrivono anche [5]:

$$\frac{1}{\mu c}\left[\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_u} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\alpha\sigma} \tilde{p}_\rho \beta^\sigma\right] = \frac{1}{\mu c^2}\frac{\tilde{\mathrm{D}}\tilde{p}_\alpha}{\tilde{\mathrm{D}}\mathrm{T}_u}, \tag{18}$$

dove si è posto [3].

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} h^{\alpha\tau} (\tilde{\partial}_\beta h_{\tau\gamma} + \tilde{\partial}_\gamma h_{\tau\beta} - \tilde{\partial}_\tau h_{\beta\gamma}) \tag{19}$$

ed anche $c\mathrm{dT}_u = \mathrm{d}\sigma_u$.

La quantità in (18) è un vettore « spaziale » e rappresenta la forza istantanea che agisce sul corpo, nel sistema a riposo di u^i.

Detta $\tilde{f}_\alpha$ tale forza, (17) si scrive, dopo semplice algebra [6]:

$$\tilde{f}_\alpha = \frac{\mu c^2 u_0}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left[-\tilde{\partial}_\alpha u^0 - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dT}_u}\left(\frac{u_\alpha}{u_0}\right) + \beta^\rho \left(\tilde{\partial}_\alpha\left(\frac{u_\rho}{u_0}\right) - \tilde{\partial}_\rho\left(\frac{u_\alpha}{u_0}\right)\right)\right]. \tag{20}$$

(4) In (13) si è tenuto conto del fatto che $\mathrm{d}\tilde{p}^i/\mathrm{d}\sigma_k$ non è un quadrivettore.

(5) $\dfrac{\tilde{\mathrm{D}}\tilde{p}_\alpha}{\tilde{\mathrm{D}}\sigma_u}$ è la derivata (covariante) assoluta di $\tilde{p}^i$ nello spazio vettoriale trasverso di u^i.

(6) Da (8) si ha facilmente

$$(u^r k_r) = -\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \qquad \text{con} \quad \beta^2 = \beta^i \beta_i .$$

Proiettiamo ora l'equazione della geodetica (5) nello spazio vettoriale parallelo ad u^i (7).

Da (5) si ha:

$$u^i \, k_{i;j} \, k^j = 0 \tag{21}$$

e tenendo conto di (1) essa diventa:

$$\frac{dk_0}{d\sigma_k} - \frac{1}{2} (u^r k_r)^2 \left[\beta^\rho \beta^\sigma \partial_0 h_{\rho\sigma} + 2 u^0 \partial_0 u_0 + 2 \beta^i \partial_0 u_i\right] = 0 . \tag{22}$$

La componente k_0 può anche scriversi, da (8) e (15):

$$k_0 = \frac{u_0}{\mu c^2} \mathscr{E}_k \tag{23}$$

dove $\mathscr{E}_k = -(u^r k_r) \mu c^2$ è l'energia a riposo più l'energia cinetica del corpo. Differenziando (23), si ha:

$$\frac{dk_0}{d\sigma_k} = \frac{u_0}{\mu c^2} \frac{d\mathscr{E}_k}{d\sigma_x} - \frac{\mathscr{E}_k}{\mu c^2} (u^r k_r)(\beta^i + u^i) \partial_i u_0 . \tag{24}$$

Sostituendo (24) in (22) si ha:

$$\left[\frac{u_0}{\mu c^2} \frac{d\mathscr{E}_k}{d\sigma_k} - \frac{1}{2} (u^r k_r) \beta^\rho \beta^\sigma \partial_0 h_{\rho\sigma}\right] + (u^r k_r)^2 u_0^2 \left[\beta^\rho \tilde{\partial}_\rho u^0 + \beta^\rho \frac{d}{c dT_u} \left(\frac{u_\rho}{u_0}\right)\right] = 0. \tag{25}$$

I primi due termini si possono anche scrivere:

$$-(u^r k_r) \frac{u_0}{\mu c^2} \left[\frac{d}{d\sigma_u} \left(\frac{k_0 \mu c^2}{u_0}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{k^\rho \mu c^2}{u_0}\right) \beta^\sigma \partial_0 h_{\rho\sigma}\right] . \tag{26}$$

La quantità $\left(\frac{k^i \mu c^2}{u_0}\right)$ è certamente un vettore, rispetto a trasformazioni puramente spaziali, in quanto, rispetto ad esse, u^0 rimane invariato (8).

Sarà lecito allora porre (26) come la derivata assoluta rispetto al tempo proprio di u^i, e calcolata nel suo sistema a risposo, della componente temporale di tale vettore, cioè di $\mathscr{E}_k$.

Si ha allora da (26) e (23):

$$\frac{\tilde{D}\mathscr{E}_k}{\tilde{D}T_u} = - \frac{\mu c^2 u_0}{(1 - \beta^2)^{1/2}} v^\rho \left[\tilde{\partial}_\rho u^0 + \frac{d}{c dT_u} \left(\frac{u_\rho}{u_0}\right)\right] . \tag{27}$$

(7) L'insieme dei vettori paralleli ad u^i in ogni punto di S_4.

(8) Una trasformazione spaziale è del tipo $x'^\rho = f(x^1, x^2, x^3)$; $x'^0 = x^0$; rispetto ad essa si ha facilmente

$$u'^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^i} u^i = u^0 \quad ; \quad u'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^i} u^i = 0 .$$

Introducendo le nuove quantità:

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
&\tilde{E}_\alpha = -\tilde{\partial}_\alpha \Phi - \frac{1}{c}\frac{d}{dT_u}\tilde{A}_\alpha \\
&\tilde{B}^\alpha = \delta^{\alpha\beta\gamma}\,\tilde{\partial}_\beta \tilde{A}_\gamma \\
&\Phi = u^0\,;\ \tilde{A}_\alpha = \frac{u_\alpha}{u_0} \\
&\tilde{Q} = \mu c^2 u_0 (1 - \beta^2)^{-1/2},
\end{aligned}
$$

le equazioni (20) e (27) si scrivono:

$$
(29)\qquad \tilde{f}_\alpha = \tilde{Q}\,[\tilde{E}_\alpha + \delta_{\alpha\sigma\rho}\,\tilde{B}^\rho\,\beta^\sigma]
$$

$$
(30)\qquad \frac{\tilde{D}\mathscr{E}_k}{\tilde{D}T_u} = \tilde{Q} v^\rho\,\tilde{E}_\rho\,.
$$

La analogia con le relative equazioni della elettrodinamica nello spazio piatto è immediata (9). Il moto geodetico del corpo di massa μ nel campo gravitazionale g_{ij} avviene, rispetto ad u^i, come se esso fosse una carica $\tilde{Q}$ in un campo elettrico $\tilde{E}_\alpha$ ed un campo magnetico $\tilde{B}_\alpha$, dati da (28).

Questa ananalogia tuttavia è valida solo istante per istante in quanto la carica equivalente $\tilde{Q}$ non è in generale costante lungo Γ_k. L'analogia diviene completa quando il campo gravitazionale è costante. In tal caso il vettore u^i in (1), è parallelo al vettore di Killing temporale $\xi^i = \delta^i_0$.

Avremo allora $u^i = -\xi^i/u_0$ e quindi:

$$
(31)\qquad \tilde{Q} = \mu c^2 (\xi^i k_i)
$$

è una costante del moto per le proprietà del vettori di Killing (10) [2].

Vediamo quale è il significato fisico di $\tilde{Q}$. Consideriamo il campo gravitazionale costante di Scwarszchild [1]:

$$
(32)\qquad ds^2 = -\left(1 - \frac{2\,GM}{c^2 r}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{2\,GM}{c^2\,r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),
$$

(9) In (29) e (30) non compaiono i termini che tengono conto della reazione di radiazione; ciò vuol dire che il moto geodetico di un corpo di prova, di cui si trascuri l'emissione di onde gravitazionali, è equivalente a quello di una carica elettrica in un campo elettromagnetico di cui si trascuri la radiazione emessa. Trovare l'equivalente elettromagnetico della reazione di radiazione gravitazionale è oggetto di una indagine in corso.

(10) Occorre notare che per quanto i conti fino ad ora svolti siano analoghi a quelli contenuti nel riferimento [3], l'interpretazione dei risultati è diversa in quanto propone, nella analogia con la elettrodinamica classica in relatività ristretta, un più potente metodo di indagine. È da notare inoltre che il potenziale scalare Φ definito in (28) differisce da quello definito nel riferimento [1] perchè ivi si considera come massa gravitazionale solo l'energia a riposo più quella cinetica del corpc: $\mu c^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

con G costante della gravitazione ed M massa della sorgente del campo ed r distanza da essa del punto di Γ_k all'istante di osservazione. Da (32) ed (1) si ha:

$$u_0 = -\sqrt{-g_{00}} = \left(1 - \frac{2\,\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)^{1/2}. \tag{33}$$

Per piccoli valori della velocità e grandi valori di r, la carica $\tilde{\mathrm{Q}}$ vale:

$$\tilde{\mathrm{Q}} = -\mu c^2 (1-\beta^2)^{-1/2}\left(1 - \frac{2\,\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)^{1/2} \approx -\left[\mu c^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\mathrm{GM}\mu}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]. \tag{34}$$

Essa è l'energia totale della particella, presa con il segno meno.

Particolarmente significativa è la presenza del segno meno; essa ci assicura che il carattere attrattivo del campo gravitazionale è previsto nella equivalenza. Per grandi valori di r infatti, il campo elettrico equivalente $\tilde{\mathrm{E}}_\alpha$ va come:

$$\tilde{\mathrm{E}}_\alpha = \left(\frac{\mathrm{GM}}{c^2}\right)\frac{1}{r^2} \tag{35}$$

cioè la massa gravitazionale della sorgente del campo: $m = \mathrm{GM}/c^2$, si comporta come una carica positiva.

Il risultato indubbiamente più importante che occorre rilevare a conclusione di questa Nota è che, in Relatività Generale, l'azione gravitazionale su un corpo di prova non dipende solo dalla sua massa, come accadeva nella teoria Newtoniana, ma anche dalla sua energia.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. LANDAU and E.M. LIFSHITZ (1962) – *The Classical Theory of Fields.*
[2] A. TRAUTMAN, F. PIRANI and H. BONDI (1964) – *Lectures on General Relativity-Brandeis.*
[3] C. CATTANEO (1958) – «Il Nuovo Cimento», *10*, 318.