Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lucia Manna Ciarrapico

Elementi curvilinei con tangente a diverso comportamento

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.2, p. 179–183.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_2_179_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Geometria differenziale. — *Elementi curvilinei con tangente a diverso comportamento.* Nota di LUCIA MANNA CIARRAPICO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — Reference systems intrinsecally determined by two tangent differential curvilinear elements, one of them being inflectional.

1. In due Note lincee [1], [2] E. Bompiani ha preso in esame nell'ordinario spazio proiettivo due elementi differenziali curvilinei del terzo ordine con lo stesso centro, la stessa tangente (non di flesso), piani osculatori a contatto del secondo ordine, una volta distinti, una volta coincidenti, ed ha determinato nel primo caso due invarianti, nel secondo più invarianti, proseguendo la ricerca per elementi d'ordine più elevato (nel primo caso 4° ordine, nel secondo 5° ordine) fino alla determinazione di un riferimento intrinseco.

In una mia Notta [3] ho effettuato la stessa ricerca nel caso che la tangente sia di flesso per ambedue gli elementi e il piano osculatore (a contatto del 3° ordine) sia una volta lo stesso, una volta diverso, proseguendo la ricerca nel primo caso per elementi del 6° ordine, nel secondo del 7° ordine, fino a giungere alla determinazione di un riferimento.

In ambedue le situazioni, quella studiata da E. Bompiani e quella studiata da me, si giunge per elementi a piani osculatori distinti a determinare *in modo unico* un riferimento proiettivo intrinseco, non altrettanto per elementi a piani osculatori coincidenti.

In questa Nota mi propongo, a scopo di completamento, di esaminare la stessa questione nel caso in cui i due elementi abbiano in un punto la stessa tangente, *non di flesso per uno, di flesso per l'altro*, sempre nei due casi, cioè una volta a piani osculatori distinti, un'altra coincidenti. È necessario per giungere alla determinazione di un riferimento proiettivo considerare in ambedue i casi i due elementi fino al 5° ordine. Il risultato è differente da quello che si ottiene nei casi considerati da E. Bompiani [2] e da me precedentemente [3], perchè questa volta si giunge, sia per piani osculatori distinti che coincidenti, *in modo unico* ad un riferimento intrinseco.

2. Consideriamo dapprima due elementi curvilinei differenziali con lo *stesso* centro O, aventi ivi la *stessa* tangente, per un elemento a contatto del 1° ordine, per l'altro di flesso (a contatto del 2° ordine), ma piano osculatore *diverso*, per il primo a contatto del 2° ordine e non superiore, per il secondo a contatto del 3° ordine e non superiore.

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1975.

In un sistema di coordinate proiettive non omogenee x, y, z che abbiano come origine O, per asse x la tangente t comune ($y = z = 0$), come piano xy ($z = 0$) il piano osculatore al primo elemento, essendo $y = 0$ il piano osculatore all'altro elemento, i due elementi E^5 ed $\bar{E}^5$ (ai quali senz'altro ci riferiamo poichè con elementi d'ordine inferiore non si arriva a determinare un riferimento) si possono rappresentare con le equazioni:

$$(2.1)\qquad E^5 \begin{cases} y = ax^2 + cx^3 + ex^4 + gx^5 + [>5] \quad (1) \\ z = \qquad dx^3 + fx^4 + hx^5 + [>5] \end{cases}$$

$$\bar{E}^5 \begin{cases} y = \qquad \bar{e}x^4 + \bar{g}x^5 + [>5] \\ z = \bar{d}x^3 + \bar{f}x^4 + \bar{h}x^5 + [>5] \end{cases}$$

con $a \neq 0$, $d \neq 0$, $e \neq 0$, $\bar{d} \neq 0$ per le ipotesi fatte.

Le trasformazioni di coordinate che lasciano invariati gli elementi finora fissati (il centro O, la tangente, i due piani osculatori) del riferimento sono:

$$(2.2)\qquad x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{py'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} ,$$
$$z = \frac{qz'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')}$$

con $\alpha \neq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ affinchè il determinante della trasformazione sia diverso da zero. I coefficienti della nuova rappresentazione saranno indicati con le stesse lettere dotate di apici.

Consideriamo i due elementi fermandoci per ora ai termini del 3° ordine. Si hanno tra i coefficienti le seguenti relazioni:

$$(2.3)\qquad a'p = a\alpha^2 \quad , \quad d'q = d\alpha^3 \quad , \quad \bar{d}'q = \bar{d}\alpha^3$$

$$(2.4)\qquad c'p = c\alpha^3 + 2\,aa'\alpha\beta + 2\,a\alpha^2\lambda - p\lambda a' .$$

Poichè $a \neq 0$, $d \neq 0$ si può sempre scegliere il riferimento iniziale in modo che siano $a = d = 1$; dalle (2.3) discende che tali valori rimangono invariati per le trasformazioni per cui $p = \alpha^2$, $q = \alpha^3$. Con tali semplificazioni risulta $\bar{d}$ *invariante*, mentre la (2.4) diviene (essendo $\alpha \neq 0$) $c'\alpha = c\alpha^2 + 2\,\beta + \alpha\lambda$.

Scelto ora il riferimento iniziale in modo che sia $c = 0$, tale valore si conserva per le trasformazioni per cui $2\,\beta = -\alpha\lambda$.

3. Esaminiamo ora come agisce la trasformazione con le precisazioni suddette su E^5 ed $\bar{E}^5$:

$$E^5 \begin{cases} y = x^2 + ex^4 + gx^5 + [>5] \\ z = x^3 + fx^4 + hx^5 + [>5] \end{cases} \quad , \quad \bar{E}^5 \begin{cases} y = \bar{e}x^4 + \bar{g}x^5 + [>5] \\ z = \bar{d}x^3 + \bar{f}x^4 + \bar{h}x^5 + [>5] \end{cases}$$

(1) La notazione $[>s]$ indica termini arbitrari d'ordine $> s$ in x.

con le trasformazioni:

$$x = \frac{\alpha x' - \alpha\lambda y'/2 + \gamma z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{\alpha^2 y'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \, ,$$

$$z = \frac{\alpha^3 z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \, .$$

Si hanno tra i coefficienti di $\overline{\mathrm{E}}^5$ ed $\overline{\mathrm{E}}'^5$ le seguenti relazioni:

$$\bar{e}' = \bar{e}\alpha^2 \quad ; \quad \bar{f}' = \bar{f}\alpha + 2\bar{d}\lambda \quad ; \quad \alpha\bar{h}' = \alpha^3\bar{h} + 3\gamma\bar{d}^2 + \lambda\,(5\,\alpha\lambda\bar{d} - \alpha\bar{f}' + 4\bar{f}\alpha^2)$$

$$\bar{g}' = \alpha^3\bar{g} + \lambda\,(4\,\alpha^2\bar{e} - \bar{e}') \, .$$

Si può fare $\bar{e} = 1$ (per ipotesi $\bar{e} \neq 0$), $\bar{f} = \bar{h} = 0$; tali valori (essendo $\bar{d} \neq 0$) si conservano se $\alpha = 1$, $\lambda = \gamma = 0$; $\bar{g}$ risulta di conseguenza *invariante*.

Con tali semplificazioni le relazioni tra i coefficienti di E^5 ed E'^5 sono:

$$e' = e + \mu \quad , \quad g' = g + \nu \quad , \quad f' = f \quad , \quad h' = h + 2\mu \, .$$

Posto $e = g = 0$, tali valori si conservano per le trasformazioni per cui $\mu = \nu = 0$; f ed h risultano pertanto due *invarianti*.

Si ha quindi la forma canonica:

$$\mathrm{E}^5 \begin{cases} y = x^2 + [>5] \\ z = x^3 + fx^4 + hx^5 + [>5] \end{cases} \quad , \quad \overline{\mathrm{E}}^5 \begin{cases} y = x^4 + \bar{g}x^5 + [>5] \\ z = \bar{d}x^3 + [>5] \end{cases}$$

che individua il riferimento; i coefficienti letterali f, h, $\bar{d}$, $\bar{g}$ e tutti i rimanenti sono invarianti proiettivi della coppia di elementi.

4. Studiamo ora il comportamento di due elementi nelle condizioni indicate nel paragrafo 2° ma con lo stesso piano osculatore. Anche questa volta basta considerare i due elementi fino al 5° ordine e si giunge come nel caso precedente a determinare in *modo unico* un riferimento proiettivo intrinseco. Se $z = 0$ è l'equazione del piano osculatore comune, E^5 ed $\overline{\mathrm{E}}^5$ si possono rappresentare con le equazioni:

$$\mathrm{E}^5 \begin{cases} y = ax^2 + cx^3 + ex^4 + gx^5 + [>5] \\ z = \phantom{ax^2 + {}} dx^3 + fx^4 + hx^5 + [>5] \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{E}}^5 \begin{cases} y = \bar{c}x^3 + \bar{e}x^4 + \bar{g}x^5 + [>5] \\ z = \phantom{\bar{c}x^3 + {}} \bar{f}x^4 + \bar{h}x^5 + [>5] \end{cases}$$

con $a \neq 0$, $d \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$, $\bar{f} \neq 0$ per le ipotesi fatte.

Le trasformazioni di coordinate che lasciano invariati gli elementi finora fissati (centro, tangente e piano osculatore) del riferimento sono:

$$x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{py' + qz'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \, ,$$

$$z = \frac{rz'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')}$$

con $\alpha \neq 0$, $p \neq 0$, $r \neq 0$.

Anche questa volta fermiamoci ai termini del terzo ordine. Si hanno tra i coefficienti le relazioni:

$$a'p = a\alpha^2 \quad , \quad d'r = d\alpha^3 \quad , \quad \bar{c}'p = \bar{c}\alpha^3 \tag{4.1}$$

$$c'p = c\alpha^3 + 2\, aa'\alpha\beta + 2\, a\alpha^2\lambda - d'q - a'p\lambda\,. \tag{4.2}$$

Poichè $a \neq 0$, $d \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$ si può sempre scegliere il riferimento in modo che siano $a = d = \bar{c} = 1$; tali valori, essendo $\alpha \neq 0$, si conservano per le trasformazioni per cui $\alpha = p = r = 1$. Di conseguenza la (4.2) diviene $c' = c + 2\,\beta + \lambda - q$. Si può fare $c = 0$ e tale valore si conserva se $q = 2\,\beta + \lambda$.

5. Esaminiamo ora come agisce la trasformazione con le precisazioni suddette su E^5 ed $\bar{E}^5$:

$$E^5 \begin{cases} y = x^2 + ex^4 + gx^5 + [>5] \\ z = x^3 + fx^4 + hx^5 + [>5] \end{cases} \quad , \quad \bar{E}^5 \begin{cases} y = x^3 + \bar{e}x^4 + \bar{g}x^5 + [>5] \\ z = \bar{f}x^4 + \bar{h}x^5 + [>5] \end{cases}$$

con le trasformazioni:

$$x = \frac{x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{y' + (2\,\beta + \lambda)\, z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \,,$$

$$z = \frac{z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \,.$$

Si hanno tra i coefficienti di $\bar{E}^5$ ed $\bar{E}'^5$ le seguenti relazioni:

$$\bar{f}' = \bar{f} \quad ; \quad \bar{h}' = \bar{h} + 3\,\lambda\bar{f} \quad ; \quad \bar{e}' = \bar{e} + 2\,\lambda - \bar{f}'\,(2\beta + \lambda)$$

$$\bar{g}' = \bar{g} + 5\,\lambda^2 + 3\,\beta + 4\,\bar{e}\lambda - \bar{h}'\,(2\,\beta + \lambda) - \lambda\bar{e}' - \lambda\bar{f}'\,(2\,\beta + \lambda)\,.$$

Risulta dunque che $\bar{f}$ è un *invariante*; scelto poi il riferimento in modo che sia $\bar{h} = \bar{e} = 0$, tali valori si conservano per le trasformazioni per cui $\lambda = \beta = 0$ (essendo per ipotesi $\bar{f} \neq 0$). Dall'ultima relazione segue che $\bar{g}$ è un *invariante*.

Con tali precisazioni le relazioni tra i coefficienti di E^5 ed E'^5 sono:

$$e' = e + \mu + 2\,\gamma \quad , \quad g' = g + \nu + 2\,\gamma f' \quad ; \quad h' = h + 2\,\mu + 3\,\gamma \qquad f' = f.$$

Risulta pertanto anche f *invariante*; si può fare $e = h = g = 0$ per le trasformazioni per cui $\mu = \gamma = \nu = 0$.

Siamo così giunti alla forma canonica che individua il riferimento *in modo univoco*:

$$E^5 \begin{cases} y = x^2 + [>5] \\ z = x^3 + fx^4 + [>5] \end{cases} \quad , \quad \bar{E}^5 \begin{cases} y = x^3 + \bar{g}x^5 + [>5] \\ z = \bar{f}x^4 + [>5]\,. \end{cases}$$

I coefficienti letterali $f, \bar{f}, \bar{g}$ e tutti i rimanenti sono invarianti della coppia di elementi.

Si conclude con il seguente Teorema:

La configurazione di due elementi curvilinei del 5° ordine nell'ordinario spazio proiettivo aventi in un punto la stessa tangente, a contatto del 1° ordine per un elemento e del 2° ordine per l'altro, e ivi piani osculatori (rispettivamente a contatto del 2° e 3° ordine) *diversi oppure coincidenti* determina in modo unico un tetraedro e un punto unità (quindi non appartenente a facce del tetraedro) e quattro invarianti proiettivi nel primo caso, tre nel secondo.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BOMPIANI (1935) – *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VI, *22*, 483–491.

[2] E. BOMPIANI (1968) – *Invarianti proiettivi di elementi differenziali tangenti*, « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, *44* (3), 343–348.

[3] L. MANNA CIARRAPICO (1974) – *Elementi curvilinei tangenti nell'ordinario spazio proiettivo*, « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, *57*, 576–582.