Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mihai Dediu

Tre campi di vettori tangenti indipendenti sugli spazi lenticolari di dimensione 4n + 3

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.2, p. 174–178.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_2_174_0>

Geometria differenziale. — *Tre campi di vettori tangenti indipendenti sugli spazi lenticolari di dimensione* $4n+3$. Nota di MIHAI DEDIU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — Dans [5] G. Vranceanu a construit un champ de vecteurs régulier tangent aux espaces lenticulaires quelconques. Dans [2] et [6] on a construit trois champs de vecteurs réguliers tangents aux espaces lenticulaires de dimension trois. Dans cet travail nous allons construire trois champs indépendants de vecteurs réguliers tangents à l'espace lenticulaire de dimension $4n+3$, et démontrer qu'il n'y en a pas quatre.

È ben noto [1], che lo spazio lenticolare $L^{2n+1}[p\,;p_0,\cdots,p_n]$ si può ottenere dalla sfera $S^{2n+1}\subset R^{2n+2}(x_0,\cdots,x_{2n+1})$,

$$S^{2n+1}: x_0^2+\cdots+x_{2n+1}^2=1,$$

identificando punti equivalenti rispetto al gruppo discreto ciclico finito [3] generato della rotazione

$$z_h' = z_h\, e^{2\pi i p_h/p}, \qquad (h=0,1,\cdots,n)\,;\, z_h = x_{2h}+ix_{2h+1},$$

dove $p, p_0,\cdots,p_n$ sono numeri interi, con p, p_h primi fra loro.

Per lo spazio lenticolare $L^{4n+3}[p\,;p_0,\cdots,p_{2n+1}]$, $p_k\equiv 1 \pmod p$, $(k=0,1,\cdots,2n+1)$, ottenibile nel modo indicato dalla sfera

$$S^{4n+3}: x_0^2+\cdots+x_{4n+3}^2=1, \tag{1}$$

vogliamo costruire tre campi di vettori tangenti. Per questa consideriamo l'immersione di questo spazio lenticolare nello spazio euclideo $R^{8(n+1)^2}(v)$ coll'aiuto delle formule [4]:

$$\begin{aligned} &v_{2h}=z_{2h}^{p}\,, \quad v_{2h+1}=z_{2h+1}^{p}\,, \quad v_{2h\,2k+1}=z_{2h}\,z_{2k+1}^{p_{2h\,2k+1}}\,, \quad v_{2h+1\,2k}=z_{2h+1}\,z_{2k}^{p_{2h+1\,2k}} \\ &v_{2h\,2k}=z_{2h}\,z_{2k}^{p_{2h\,2k}}\,,\ (h\neq k) \quad , \quad v_{2h+1\,2k+1}=z_{2h+1}\,z_{2k+1}^{p_{2h+1\,2k+1}}\,,\ (h\neq k)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

dove $h, k=0,1,\cdots,2n+1$ e $p_{ij}=p_i r_j$, r_j essendo interi definiti delle formule

$$pq_j - r_j p_j = 1\,, \qquad (j=0,1,\cdots,2n+1). \tag{3}$$

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1975.

Posto $v = u + iw$ e $z = P + iQ$, le (2) si scrivono:

$$u_{2h} + iw_{2h} = P_{2h} + iQ_{2h} = (x_{4h} + ix_{4h+1})^{p}$$

$$u_{2h+1} + iw_{2h+1} = P_{2h+1} + iQ_{2h+1} = (x_{4h+2} + ix_{4h+3})^{p}$$

$$u_{2h\,2k+1} + iw_{2h\,2k+1} = P_{2h\,2k+1} + iQ_{2h\,2k+1} = (x_{4h} + ix_{4h+1})(x_{4k+2} + ix_{4k+3})^{p_{2h\,2k+1}}$$

$$(4)\quad u_{2h+1\,2k} + iw_{2h\,2k} = P_{2h+1\,2k} + iQ_{2h+1\,2k} = (x_{4h+2} + ix_{4h+3})(x_{4k} + ix_{4k+1})^{p_{2h+1,2k}}$$

$$u_{2h\,2k} + iw_{2h\,2k} = P_{2h\,2k} + iQ_{2h\,2k} = (x_{4h} + ix_{4h+1})(x_{4k} + ix_{4k+1})^{p_{2h\,2k}}, \quad (h \neq k)$$

$$u_{2h+1\,2k+1} + iw_{2h+1\,2k+1} = P_{2h+1\,2k+1} + iQ_{2h+1\,2k+1} = (x_{4h+2} + ix_{4h+3}) \cdot$$
$$\cdot (x_{4k+2} + ix_{4k+3})^{p_{2h+1,2k+1}}, \quad (h \neq k).$$

PROPOSIZIONE 1. *Un campo di vettori tangenti allo spazio lenticolare* $L^{4n+3}[p\,; p_0, \cdots, p_{2n+1}]$, $p_k \equiv 1 \pmod p$, $(k = 0, 1, \cdots, 2n+1)$, *è determinato dal vettore di componenti*:

$$A_{2h} = -x_{4h+1}\frac{\partial P_{2h}}{\partial x_{4h}} + x_{4h}\frac{\partial P_{2h}}{\partial x_{4h+1}} \quad ; \quad B_{2h} = -x_{4h+1}\frac{\partial Q_{2h}}{\partial x_{4h}} + x_{4h}\frac{\partial Q_{2h}}{\partial x_{4h+1}}$$

$$A_{2h+1} = x_{4h+3}\frac{\partial P_{2h+1}}{\partial x_{4h+2}} - x_{4h+2}\frac{\partial P_{2h+1}}{\partial x_{4h+3}} \quad ; \quad B_{2h+1} = x_{4h+3}\frac{\partial Q_{2h+1}}{\partial x_{4h+2}} - x_{4h+2}\frac{\partial Q_{2h+1}}{\partial x_{4h+3}}$$

$$A_{2h,2k+1} = -x_{4h+1}\frac{\partial P_{2h,2k+1}}{\partial x_{4h}} + x_{4h}\frac{\partial P_{2h,2k+1}}{\partial x_{4h+1}} + x_{4k+3}\frac{\partial P_{2h,2k+1}}{\partial x_{4k+2}} - x_{4k+2}\frac{\partial P_{2h,2k+1}}{\partial x_{4k+3}}$$

$$B_{2h,2k+1} = -x_{4h+1}\frac{\partial Q_{2h,2k+1}}{\partial x_{4h}} + x_{4h}\frac{\partial Q_{2h,2k+1}}{\partial x_{4h+1}} + x_{4k+3}\frac{\partial Q_{2h,2k+1}}{\partial x_{4k+2}} - x_{4k+2}\frac{\partial Q_{2h,2k+1}}{\partial x_{4k+3}}$$

$$A_{2h+1,2k} = -x_{4k+1}\frac{\partial P_{2h+1,2k}}{\partial x_{4k}} + x_{4k}\frac{\partial P_{2h+1,2k}}{\partial x_{4k+1}} + x_{4h+3}\frac{\partial P_{2h+1,2k}}{\partial x_{4h+2}} - x_{4h+2}\frac{\partial P_{2h+1,2k}}{\partial x_{4h+3}}$$

$$(5)\quad B_{2h+1,2k} = -x_{4k+1}\frac{\partial Q_{2h+1,2k}}{\partial x_{4k}} + x_{4k}\frac{\partial Q_{2h+1,2k}}{\partial x_{4k+1}} + x_{4h+3}\frac{\partial Q_{2h+1,2k}}{\partial x_{4h+2}} - x_{4h+2}\frac{\partial Q_{2h+1,2k}}{\partial x_{4h+3}}$$

$$A_{2h,2k} = -x_{4h+1}\frac{\partial P_{2h,2k}}{\partial x_{4h}} - x_{4k+1}\frac{\partial P_{2h,2k}}{\partial x_{4k}} + x_{4h}\frac{\partial P_{2h,2k}}{\partial x_{4h+1}} + x_{4k}\frac{\partial P_{2h,2k}}{\partial x_{4k+1}}, \quad (h \neq k)$$

$$B_{2h,2k} = -x_{4h+1}\frac{\partial Q_{2h,2k}}{\partial x_{4h}} - x_{4k+1}\frac{\partial Q_{2h,2k}}{\partial x_{4k}} + x_{4h}\frac{\partial Q_{2h,2k}}{\partial x_{4h+1}} + x_{4k}\frac{\partial Q_{2h,2k}}{\partial x_{4k+1}}, \quad (h \neq k)$$

$$A_{2h+1,2k+1} = x_{4h+3}\frac{\partial P_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4h+2}} + x_{4k+3}\frac{\partial P_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4k+2}} - x_{4h+2}\frac{\partial P_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4h+3}} -$$
$$- x_{4k+2}\frac{\partial P_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4k+3}}, \quad (h \neq k)$$

$$B_{2h+1,2k+1} = x_{4h+3}\frac{\partial Q_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4h+2}} + x_{4k+3}\frac{\partial Q_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4k+2}} - x_{4h+2}\frac{\partial Q_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4h+3}} -$$
$$- x_{4k+2}\frac{\partial Q_{2h+1,2k+1}}{\partial x_{4k+3}}, \quad (h \neq k).$$

Infatti, effettuando i differenziali delle funzioni u e w e usufruendo di un campo di vettori tangenti alla sfera S^{4n+3}, cioè

$$
(6) \qquad dx_j = \begin{cases} -x_{4h+1}\,dt & \text{se } j \equiv 0 \pmod 4 \\ x_{4h}\,dt & \text{se } j \equiv 1 \pmod 4 \\ x_{4h+3}\,dt & \text{se } j \equiv 2 \pmod 4 \\ -x_{4h+2}\,dt & \text{se } j \equiv 3 \pmod 4 , \end{cases}
$$

si ottiene il vettore di componenti (5); e questo determina un campo di vettori tangenti allo spazio lenticolare $L^{4n+3}[p\,;p_0,\cdots,p_{2n+1}]$.

COROLLARIO 1.1. *Un secondo campo di vettori tangenti allo spazio lenticolare* $L^{4n+3}[p\,;p_0,\cdots,p_{2n+1}]$ *si ottiene usufruendo di un altro campo di vettori tangenti alla sfera* S^{4n+3}, *cioè*

$$
(7) \qquad dx_j = \begin{cases} -x_{4h+2}\,dt & se\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ -x_{4h+3}\,dt & se\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ x_{4h}\,dt & se\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ x_{4h+1}\,dt & se\ j \equiv 3 \pmod 4 . \end{cases}
$$

COROLLARIO 1.2. *Un terzo campo di vettori tangenti allo spazio lenticolare* $L^{4n+3}[p\,;p_0,\cdots,p_{2n+1}]$ *si ottiene utilizzando un terzo campo di vettori tangenti alla sfera* S^{4n+3}, *cioè*

$$
(8) \qquad dx_j = \begin{cases} -x_{4h+3}\,dt & se\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ x_{4h+2}\,dt & se\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ -x_{4h+1}\,dt & se\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ x_{4h}\,dt & se\ j \equiv 3 \pmod 4 . \end{cases}
$$

Basta infatti procedere in modo analogo a quello seguito nella dimostrazione della Proposizione 1.

PROPOSIZIONE 2. *Il campo di vettori tangenti allo spazio lenticolare* $L^{4n+3}[p\,;p_0,\cdots,p_{2n+1}]$ *determinato dal vettore di componenti* (5) *è regolare.*

Dimostrazione. Utilizzeremo il fatto che per un punto qualunque P dello spazio lenticolare $L^{4n+3}[p_0,\cdots,p_{2n+1}]$ possiamo – usufruendo di una rotazione in ogni piano di coordinate x_{2h}, x_{2h+1} – supporre che tutte le coordinate con indice dispari, di questo punto, siano nulle; dunque

$$
(9) \qquad x_1 = x_3 = \cdots = x_{4n+3} = 0.
$$

Il vettore (5) così si scrive nel punto P

$$A_{2h} = A_{2h+1} = A_{2h,2k+1} = A_{2h+1,2k} = A_{2h,2k} = A_{2h+1,2k+1} = 0$$

$$B_{2h} = p x_{4h}^{p} \quad ; \quad B_{2h+1} = -p x_{4h+2}^{p} \quad ; \quad B_{2h,2k+1} = x_{4h} x_{4k+2}^{p_{2h\,2k+1}} (1 + p_{2h\,2k+1})$$

$$B_{2h+1,2k} = - x_{4k}^{p_{2h+1\,2k}} x_{4h+2} (1 + p_{2h+1,2k}) \quad ; \quad B_{2h,2k} = x_{4h} x_{4k}^{p_{2h\,2k}} (1 + p_{2h,2k})$$

$$B_{2h+1,2k+1} = x_{4h+2} x_{4k+2}^{p_{2h+1,2k+1}} (1 + p_{2h+1,2k+1}).$$

Se fosse $B_{2h} = B_{2h+1} = 0$, $(h = 0, 1, \cdots, n)$, tenendo anche conto delle (9) si avrebbe una contraddizione colla (1); dunque (5) è regolare.

COROLLARIO 2.2. *Il secondo e il terzo campo di vettori tangenti allo spazio lenticolare* $L^{4n+3}[p ; p_0, \cdots, p_{2n+1}]$, *determinati nei Corollari* 1.1 *e* 1.2, *sono regolari.*

La dimostrazione è simile a quella della Proposizione 2.

PROPOSIZIONE 3. *Il campi di vettori tangenti* (5), 1.1 e 1.2 *sono linearmente indipendenti.*

La dimostrazione si ottiene osservando che i determinanti del terz'ordine formati con le componenti di questi tre campi, calcolati nel punto P, non possono essere tutti nulli, perché altrimenti tutte le coordinate $x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{4n+3}$ sarebbero nulle; ma questo è in contraddizione colla (1), dunque i campi sono linearmente indipendenti.

PROPOSIZIONE 4. *I campi di vettori tangenti* (5), 1.1 *e* 1.2 *sono invarianti rispetto al gruppo lenticolare dello spazio lenticolare* $L^{4n+3}[p ; p_0, \cdots, p_{2n+1}]$.

Dimostrazione. Assunto $p_k = 1$, $k = 0, 1, \cdots, 2n + 1$, allora l'immersione (2) si scrive:

$$v_{2h\,2k} = z_{2h} z_{2k}^{p-1} \quad ; \quad v_{2h+1\,2k+1} = z_{2h+1} z_{2k+1}^{p-1}$$

$$v_{2h+1\,2k} = z_{2h+1} z_{2k}^{p-1} \quad ; \quad v_{2h\,2k+1} = z_{2h} z_{2k+1}^{p-1}.$$

I campi di vettori tangenti si scrivono, in questo caso, sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} & A_{2h\,2k} + i B_{2h\,2k} = i p z_{2h} z_{2k}^{p-1} \\ & A_{2h+1\,2k} + i B_{2h+1\,2k} = i (p - 2) z_{2k}^{p-1} z_{2h+1} \\ & A_{2h\,2k+1} + i B_{2h\,2k+1} = - i (p - 2) z_{2h} z_{2k+1}^{p-1} \\ & A_{2h+1\,2k+1} + i B_{2h+1\,2k+1} = - i p z_{2h+1} z_{2k+1}^{p-1} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} A'_{2h\,2k} + iB'_{2h\,2k} = -z_{2k}^{p-2}\,[(p-1)\,z_{2h}\,z_{2k+1} + z_{2k}\,z_{2h+1}] \\ A'_{2h+1\,2k} + iB'_{2h+1\,2k} = z_{2k}^{p-2}\,[z_{2k}\,z_{2h} - (p-1)\,z_{2h+1}\,z_{2k+1}] \\ A'_{2h\,2k+1} + iB'_{2h\,2k+1} = z_{2k+1}^{p-2}\,[(p-1)\,z_{2h}\,z_{2k} - z_{2h+1}\,z_{2k+1}] \\ A'_{2h+1\,2k+1} + iB'_{2h+1\,2k+1} = z_{2k+1}^{p-2}\,[z_{2h}\,z_{2k+1} + (p-1)\,z_{2h+1}\,z_{2k}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} A''_{2h\,2k} + iB''_{2h\,2k} = iz_{2k}^{p-2}\,[z_{2k}\,z_{2h+1} + (p-1)\,z_{2h}\,z_{2k+1}] \\ A''_{2h+1\,2k} + iB''_{2h\,2k+1} = iz_{2k}^{p-2}\,[z_{2h}\,z_{2k} + (p-1)\,z_{2h+1}\,z_{2k+1}] \\ A''_{2h\,2k+1} + iB''_{2h\,2k+1} = iz_{2k+1}^{p-2}\,[z_{2h+1}\,z_{2k+1} + (p-1)\,z_{2h}\,z_{2k}] \\ A''_{2h+1\,2k+1} + iB''_{2h+1\,2k+1} = iz_{2k+1}^{p-2}\,[z_{2h}\,z_{2k+1} + (p-1)\,z_{2h+1}\,z_{2k}]. \end{cases}$$

L'invarianza si verifica ora facilmente, perché in ogni monomio la somma degli esponenti è p.

Abbiamo dunque dimostrato il

TEOREMA 5. *I vettori* (5), 1.1 *e* 1.2 *definiscono 3 campi linearmente indipendenti di vettori tangenti regolari allo spazio lenticolare di dimensione* $4n+3$, $L^{4n+3}\,[p\,;p_0,\cdots,p_{2n+1}]$, $p_k \equiv 1 \pmod{p}$; $(k = 0, 1, \cdots, 2n+1)$.

COROLLARIO 5.1. *Lo spazio lenticolare di dimensione* $8m+3$ *ammette precisamente 3 campi linearmente indipendenti di vettori tangenti regolari e non di più.*

Dimostrazione. Lo spazio lenticolare di dimensione $8m+3$ si ottiene dalla sfera S^{8m+3}; ma questa sfera – come risulta dal teorema di Adams – possiede al massimo 3 campi di vettori tangenti. Poiché lo spazio lenticolare non può avere più campi di vettori tangenti che la sfera di cui lo si ottiene, così dal Teorema 5 discende subito il corollario.

BIBLIOGRAFIA

[1] MIHAI DEDIU (1969) – *On the lens spaces*, « Rev. Roum. Math. Pures et Appl. », *14*, 623–627.

[2] MIHAI DEDIU – *Campi di vettori tangenti sugli spazi lenticolari di dimensione tre* (apparirà).

[3] BENIAMINO SEGRE (1961) – *Lectures on modern geometry*, Edizioni Cremonese, Roma.

[4] G. VRANCEANU (1965) – *Sopra gli spazi proiettivi e lenticolari*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *70*, 235–248.

[5] G. VRANCEANU (1972) – *Vecteurs tangents aux espaces lenticulaires*, « Rev. Roum. Math. Pures Appl. », *17*, 469–472.

[6] G. VRANCEANU si M. DEDIU (1972) – *Cimpuri de vectori tangenti la spaţiile lenţiculare* $L^3\,[3\,;1,2]$ *şi* $L^3[3\,;1,1]$, « St. Cerc. Mat. Tom. », *24* (10), 1585–1600.