
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

RUDOLF KURTH

**Erweiterungender der Ersten Integrale analytischer
Differentialgleichungen**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.2, p. 127–136.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_2_127_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni differenziali nel campo analitico. — *Erweiterungen der Ersten Integrale analytischer Differentialgleichungen.* Nota di RUDOLF KURTH, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — L'Autore considera un'equazione differenziale ordinaria in un campo complesso a più dimensioni e supposto che di essa sia noto un integrale primo ne studia la perturbazione corrispondente ad una perturbazione nota della stessa equazione. Sotto opportune ipotesi sono date condizioni sufficienti che assicurano la convergenza di alcune serie connesse al problema.

§ 1. FORMULIERUNG DES PROBLEMS

I.1. In einem Gebiet des $(n+2)$ -dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^{n+2} seien n holomorphe Funktionen $f_1(x, t | \lambda), f_2(x, t | \lambda), \dots, f_n(x, t | \lambda)$ der $n+2$ komplexen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n, t, \lambda$ gegeben (den Vektor $(x_1, \dots, x_n)$ haben wir hierbei mit x bezeichnet), und es werde die einparametrische Schar von Differentialgleichungen

$$(a) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t | \lambda)$$

mit

$$f = (f_1, \dots, f_n) \quad (\text{Def.})$$

in diesem Gebiete betrachtet. Für einen zulässigen Wert des Scharparameters λ , etwa für $\lambda = 0$, sei ein holomorphes Erstes Integral $\Phi^{(0)}(x, t)$ der entsprechenden Differentialgleichung

$$(b) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t | 0)$$

bekannt, d.h. eine nicht-konstante holomorphe Funktion, welche auf jeder Lösungskurve der Gleichung (b) konstant ist: Ist

$\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t)$ die Lösung der Gleichung (b), welche der Anfangsbedingung

$$\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{t}) = \overset{\circ}{x} \quad \text{für alle zulässigen } (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t})$$

genügt, so ist

$$\Phi^{(0)}(\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t), t) = \Phi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t})$$

für alle zulässigen $\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}$ und t . Die allgemeine Lösung $\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t)$ der Differentialgleichung (b) sei ebenfalls als gegeben vorausgesetzt.

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1975.

In der theoretischen Mechanik tritt nun die folgende Aufgabe auf: dieses gegebene Erste Integral $\Phi^{(0)}(x, t)$ der Gleichung (b) zu einem holomorphen Ersten Integral der Gleichung (a) mit beliebigem λ zu «erweitern»; d.h., ein Erstes Integral der Gleichung (a) zu finden, welches für $\lambda = 0$ mit $\Phi^{(0)}$ übereinstimmt.

In einer früheren Arbeit [2] wurde eine formale Lösung mittels formaler Potenzreihen angegeben. Hier nun sollen hinreichende Bedingungen für die Konvergenz jener Reihen entwickelt werden.

1.2. Man gewinnt eine Übersicht über all nur möglichen solchen Erweiterungen, wenn man das Problem in der folgenden Weise verallgemeinert:

In dem zugrunde gelegten Gebiet des C^{n+2} werde eine holomorphe Funktion $\Phi(x, t | \lambda)$ betrachtet, welche für $\lambda = 0$ in ein gegebenes Erstes Integral der Gleichung § 1.1 (b) übergeht. Es sind alle holomorphen Ersten Integrale $\Psi(x, t | \lambda)$ der Gleichung § 1.1 (a) zu ermitteln, welche für $t = 0$ mit $\Phi(x, 0 | \lambda)$ übereinstimmen. Diese Integrale haben also die zwei Bedingungen

$$\Psi(x, t | 0) = \Phi(x, t | 0)$$

und

$$\Psi(x, 0 | \lambda) = \Phi(x, 0 | \lambda)$$

zu erfüllen.

Wie werden zeigen: Für jede Funktion $\Phi(x, t | \lambda)$ gibt es – unter gewissen Voraussetzungen – genau ein solches Erstes Integral. Damit erhält man eine Übersicht über alle Lösungen des in § 1 formulierten Problems: Jeder holomorphen Funktion $\Phi(x, t | \lambda)$ mit

$$\Phi(x, t | 0) = \Phi^{(0)}(x, t)$$

entspricht (unter den noch zu präzisierenden Voraussetzungen) genau eine Erweiterung des Ersten Integrals $\Phi^{(0)}$.

§ 2. PRÄZISIERUNG DER VORAUSSETZUNGEN

Zunächst sind die Voraussetzungen genauer zu fassen:

Es sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein beliebiger Punkt des C^n , und ρ irgendeine positive reelle Zahl. Als die ρ -Umgebung $\mathcal{U}_\rho^{(n)}(x)$ des Punktes x in C^n bezeichnen wir den n -dimensionalen Würfel in C^n mit Mittelpunkt x und achsenparallelen Kanten der Länge 2ρ . Es ist also

$$\mathcal{U}_\rho^{(n)}(x) = \mathcal{U}_\rho^{(1)}(x_1) \times \mathcal{U}_\rho^{(1)}(x_2) \times \dots \times \mathcal{U}_\rho^{(1)}(x_n) \quad (\text{Def.}),$$

wobei für $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\mathcal{U}_\rho^{(1)}(x_k) = \{y \in C^1 \mid |y - x_k| < \rho\} \quad (\text{Def.}).$$

Die ρ -Umgebung $\mathcal{U}_\rho^{(n)}(X)$ (in C^n) einer nicht-leeren Teilmenge X von C^n ist definiert als die Vereinigungsmenge der ρ -Umgebungen in C^n aller Punkte der Menge X :

$$\mathcal{U}_\rho^{(n)}(X) = \cup \{ \mathcal{U}_\rho^{(n)}(x) \mid x \in X \} \quad (\text{Def.}).$$

Von der rechten Seite $f(x, t \mid \lambda)$ der Differentialgleichung § 1.1 (a) setzen wir nun voraus: Es seien X ein gegebenes Gebiet des Raumes C^n , ρ und σ feste positive reelle Zahlen, λ ein in der σ -Umgebung $\mathcal{U}_\sigma^{(1)}(0)$ des Nullpunktes variabler komplexer Parameter, und die Komponenten $f_1(x, t \mid \lambda), f_2(x, t \mid \lambda), \dots, f_n(x, t \mid \lambda)$ des Vektors $f(x, t \mid \lambda)$ sein komplexwertige Funktionen von x, t und λ , welche in dem Gebiete

$$\{(x, t, \lambda) \in C^{n+2} \mid x \in \mathcal{U}_\rho^{(n)}(X), t \in \mathcal{U}_\rho^{(1)}(0), \lambda \in \mathcal{U}_\sigma^{(1)}(0)\}$$

definiert, holomorph und dem Betrage nach durch 1 beschränkt sind.

Übrigen gelten die folgenden Erörterungen in analoger Weise, wenn λ nicht ein skalarer, sondern ein vektorieller Parameter ist.

§ 3. HILFSSÄTZE

Unter den eben gemachten Voraussetzungen gelten die folgenden *Hilfssätze*:

3.1. Für alle

$$\overset{\circ}{x} \in \mathcal{U}_\rho^{(n)}(X), \quad \overset{\circ}{t} \in \mathcal{U}_\rho^{(1)}(0), \quad \lambda \in \mathcal{U}_\sigma^{(1)}(0) \quad \text{und} \quad |t - \overset{\circ}{t}| \text{ hinreichen klein}$$

gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t \mid \lambda)$ der Differentialgleichung

$$(a) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t \mid \lambda),$$

welche der Anfangsbedingung

$$\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{t} \mid \lambda) = \overset{\circ}{x}$$

genügt. Dabei ist jede Komponente φ_k des Lösungsvektors φ eine holomorphe Funktion der Komponenten $\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_n$ des Vektors $\overset{\circ}{x}$, sowie von $\overset{\circ}{t}$, t und λ .

3.2. Es sei γ eine kompakte Teilmenge der abgeschlossenen Hülle von X in C^n , ρ' und σ' seien beliebige positive reelle Zahlen $< \rho$ bzw. $< \sigma$, und F sei die kompakte Teilmenge

$$\left\{ (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t, \lambda) \in C^{n+3} \mid \overset{\circ}{x} \in \gamma, \quad |\overset{\circ}{t}| \leq \frac{1}{2} \rho', \quad |t| \leq \frac{1}{2} \rho', \quad |\lambda| \leq \sigma' \right\}$$

des C^{n+3} . Dann ist $\varphi_k(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t \mid \lambda)$ in F erklärt und holomorph und lässt sich daselbst in eine Potenzreihe nach λ entwickeln, welche für alle $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t, \lambda) \in F$ absolut und gleichmässig konvergiert.

3.3. Jede der Funktionen $\varphi_k(x, t, o | \lambda)$ ist ein für $x \in U_\rho^{(n)}(X)$, $\lambda \in U_\sigma^{(1)}(o)$, $|t|$ hinreichend klein erklärtes holomorphes Erstes Integral der Differentialgleichung § 3.1 (a), und diese n Ersten Integrale sind unabhängig. Jedes Erste Integral der Gleichung § 3.1 (a) ist eine Funktion dieser n besonderen Ersten Integrale ([1]).

3.4. Die Ersten Integrale $\varphi_k(x, t, o | \lambda)$ sind auf der kompakten Teilmenge

$$F_0 \stackrel{\text{Def.}}{=} \left\{ (x, t, \lambda) \in C^{n+2} \mid x \in Y, \quad |t| \leq \frac{1}{2} \rho', \quad |\lambda| \leq \sigma' \right\}$$

das C^{n+2} erklärt und holomorph und lassen sich daselbst in Potenzreihen nach λ entwickeln, welche für alle $(x, t, \lambda) \in F_0$ absolut und gleichmässig konvergieren.

§ 4. ZEITABHÄNGIGE ERSTE INTEGRALE

In Anbetracht der Anwendungen der Theorie in der theoretischen Mechanik werde die (komplexe) Variable t als «Zeit» bezeichnet. «Zeitabhängig» werden also solche Ersten Integrale genannt, welche Funktionen der Variablen t sind.

Die Hilfssätze des § 3 ergeben nun ohne weiteres die in § 2 angekündigte Lösung der Aufgabe von § 1:

4.1. Es sei $\Phi(x, t | \lambda)$ eine für

$$x \in U_\rho^{(n)}(X) \quad , \quad |t| \in U_\rho^{(1)}(o) \quad , \quad \lambda \in U_\sigma^{(1)}(o)$$

erklärte holomorphe Funktion derart, dass $\Phi(x, t | o)$ ein Erstes Integral der Differentialgleichung

$$(b) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t | o)$$

ist. Dann gibt es genau ein für

$$x \in U_\rho^{(n)}(X) \quad , \quad \lambda \in U_\sigma^{(1)}(o) \quad , \quad |t| \quad \text{hinreichend klein}$$

erklärtes holomorphes Erstes Integral $\Psi(x, t | \lambda)$ der Differentialgleichung

$$(a) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t | \lambda)$$

derart, dass

$$\Psi(x, t | o) = \Phi(x, t | o)$$

und

$$\Psi(x, o | \lambda) = \Phi(x, o | \lambda).$$

Es ist gegeben durch

$$(c) \quad \Psi(x, t | \lambda) = \Phi(\varphi(x, t, o | \lambda), o | \lambda).$$

Hierbei bedeutet $\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t | \lambda)$ wieder die allgemeine Lösung der Gleichung (a) mit der Anfangsbedingung $\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{t} | \lambda) = \overset{\circ}{x}$.

Denn die für Ψ explizit angegebene Funktion ist offensichtlich ein Erstes Integral der Gleichung (a), welches die Bedingung für $\Psi(x, o | \lambda)$ erfüllt. Es gibt nur ein solches Erstes Integral. Dass es auch die Bedingung für $\Psi(x, t | o)$ erfüllt, sieht man so: Zunächst einmal ist

$$\Psi(x, t | o) = \Phi(\varphi(x, t, o | o), o | o).$$

Die rechte Seite ist ein Erstes Integral der Gleichung (b), welches für $t = o$ den Wert $\Phi(x, o | o)$ annimmt. Denselben Wert nimmt aber für $t = o$ auch das Erste Integral $\Phi(x, t | o)$ an. Nun ist ein Erstes Integral durch den »Anfangswert« für $t = o$ eindeutig bestimmt. Also ist

$$\Phi(\varphi(x, t, o | o), o | o) = \Phi(x, t | o),$$

und daher ist auch

$$\Psi(x, t | o) = \Phi(x, t | o),$$

wie behauptet.

4.2. Des weiteren ergibt sich aus § 3:

Das Erste Integral $\Psi(x, t | \lambda)$ lässt sich in eine Potenzreihe nach λ entwickeln, welche für alle $(x, t, \lambda) \in F_0$ absolut und gleichmässig konvergiert. Dabei bedeutet F_0 die in § 3 eingeführte Teilmenge des C^{n+2} .

4.3. In der Formel § 4.1 (c) für das Erste Integral $\Psi(x, t | \lambda)$ erscheint die allgemeine Lösung $\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t | \lambda)$ der Differentialgleichung § 4.1 (a). In der in § 1 gestellten Aufgabe war aber nur die explizite Kenntnis der allgemeinen Lösung $\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t | o)$ der Differentialgleichung § 4.1 (b) vorausgesetzt worden. Es liegt nahe, nun in der folgenden Weise vorzugehen:

Man bestimmt die allgemeine Lösung $\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t | \lambda)$ der Differentialgleichung § 4.1 (a) als eine Potenzreihe in λ ,

$$\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t | \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \varphi^{(\alpha)}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t),$$

und setzt die aus ihr gewonnene Potenzreihe für $\varphi(x, t, o | \lambda)$ in $\Phi(x, o | \lambda)$ ein für x . Für $\alpha \geq 1$ genügen die Vektor-Funktionen $\varphi^{(\alpha)}$ einer linearen Differentialgleichung von folgender Gestalt: Die entsprechenden homogenen Gleichungen sind sämtlich mit der Jacobischen Variationsgleichung der Gleichung § 4.1 (a) identisch, welche zur Lösung $\varphi^{(0)}$ der Gleichung § 4.1 (b) gehört, und das inhomogene Glied ist durch $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(\alpha-1)}$ eindeutig bestimmt. Die Anfangsbedingungen all dieser Gleichungen (mit $\alpha \geq 1$) lauten:

$$\varphi^{(\alpha)}(x, \overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{t}) = o.$$

Ausser $\varphi^{(0)}$ muss also auch die allgemeine Lösung der Variationsgleichung explizit bekannt sein. Die Funktionen $\varphi^{(\alpha)}$ können dann durch Quadraturen ermittelt werden.

4.4. Die rechnerische Durchführung des angedeuteten Verfahrens ist unübersichtlich. Einfacher ist der folgende, in [2] dargelegte Weg:

Das in § 4.1 angegebene Erste Integral $\Psi(x, t | \lambda)$ der Gleichung § 4.1 (a) besitzt die konvergente Potenzreihen Entwicklung

$$\Psi(x, t | \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \Psi^{(\alpha)}(x, t)$$

und genügt der Liouvilleschen Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = 0.$$

Einsetzen der Reihe in diese Gleichung und Koeffizienten-Vergleich ergibt für $\alpha = 1, 2, \dots$ die Rekursionsformel

$$\frac{\partial \Psi^{(\alpha)}}{\partial t} + \sum_{k=1}^n f_k^{(0)} \cdot \Psi_k^{(\alpha)} = - \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n f_k^{(\alpha-\beta)} \cdot \Psi_k^{(\beta)};$$

dabei ist gesetzt

$$\Psi_k^{(\alpha)} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial \Psi^{(\alpha)}}{\partial x_k}$$

und

$$f_k(x, t | \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} f_k^{(\alpha)}(x, t).$$

Die unabhängigen Variablen in der Rekursionsformel sind x und t . Indem wir x durch $\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, 0, t)$ ersetzen, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(\alpha)}(\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, 0, t), t) = - \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n f_k^{(\alpha-\beta)}(\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, 0, t), t) \cdot \Psi_k^{(\beta)}(\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, 0, t), t),$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \Psi^{(\alpha)}(\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, 0, t), t) &= \Psi^{(\alpha)}(\overset{\circ}{x}, 0) - \\ &- \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n \int_0^t f_k^{(\alpha-\beta)}(\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, 0, \tau), \tau) \cdot \Psi_k^{(\beta)}(\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, 0, \tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \Psi^{(\alpha)}(\overset{\circ}{x}, 0) &= \Psi(\overset{\circ}{x}, 0 | \lambda) \\ &= \Phi(\overset{\circ}{x}, 0 | \lambda) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \Phi^{(\alpha)}(\overset{\circ}{x}, 0), \end{aligned}$$

also

$$\Psi^{(\alpha)}(\dot{x}, o) = \Phi^{(\alpha)}(\dot{x}, o)$$

und

$$\begin{aligned} \Psi^{(\alpha)}(\varphi^{(0)}(\dot{x}, o, t), t) &= \Phi^{(\alpha)}(\dot{x}, o) - \\ &- \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n \int_0^t f_k^{(\alpha-\beta)}(\varphi^{(0)}(\dot{x}, o, \tau), \tau) \cdot \Psi_k^{(\beta)}(\varphi^{(0)}(\dot{x}, o, \tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Indem wir hierin $\dot{x}$ durch $\varphi^{(0)}(x, t, o)$ ersetzen, also zu den unabhängigen Variablen x und t zurückkehren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi^{(\alpha)}(x, t) &= \Phi^{(\alpha)}(\varphi^{(0)}(x, t, o), o) - \\ &- \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n \int_0^t f_k^{(\alpha-\beta)}(\varphi^{(0)}(\dot{x}, t, \tau), \tau) \cdot \Psi_k^{(\beta)}(\varphi^{(0)}(\dot{x}, t, \tau), \tau) d\tau \end{aligned}$$

für $\alpha = 1, 2, \dots$. Das Anfangsglied $\Psi^{(0)}$ ergibt sich aus

$$\Psi^{(0)}(x, t) = \Phi(x, t | o).$$

Wir fassen zusammen:

Das ist in § 4.1 angegebene Erste Integral $\Psi(x, t | \lambda)$ der Differentialgleichung

$$(a) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t | \lambda) \quad , \quad \begin{cases} x \in U_o^{(n)}(X), \\ \lambda \in U_o^{(1)}(o), \\ |t| \text{ hinreichend klein,} \end{cases}$$

besitzt eine Potenzreihen-Entwicklung nach λ ,

$$\Psi(x, t | \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \Psi^{(\alpha)}(x, t),$$

welche für $x \in U_o^{(n)}(X)$, $|\lambda| < \sigma$ und $|t|$ hinreichend klein konvergiert. Die Konvergenz ist absolut und gleichmässig für $(x, t, \lambda) \in F_0$, wobei F_0 die in § 3.4 eingeführte kompakte Teilmenge des C^{n+2} ist. Die Koeffizienten $\Psi^{(\alpha)}$ sind rekursiv gegeben durch

$$\begin{cases} \Psi^{(0)}(x, t) = \Phi(x, t | o), \\ \Psi^{(\alpha)}(x, t) = \Phi^{(\alpha)}(\varphi^{(0)}(x, t, o)) - \\ \quad - \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n \int_0^t f_k^{(\alpha-\beta)}(\varphi^{(0)}(x, t, \tau), \tau) \cdot \Psi_k^{(\beta)}(\varphi^{(0)}(x, t, \lambda), \lambda) d\tau \end{cases} \quad \text{für } \alpha = 1, 2, \dots$$

Dabei bedeutet $\varphi^{(0)}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}, t)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (b), $dx/dt = f(x | o)$, welche der Anfangsbedingung $\varphi^{(0)}(x \overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{t}) = x$ genügt,

$$\Psi_k^{(\beta)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi^{(\beta)}(x, t) \quad (\text{Def.}),$$

und $\Phi^{(\alpha)}(x, t)$ ist erklärt durch

$$\Phi(x, t | \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \Phi^{(\alpha)}(x, t).$$

§ 5. ZEITUNABHÄNGIGE ERSTE INTEGRALE ZEITUNABHÄNGIGER GLEICHUNGEN

5.1. In den Anwendungen ist man insbesondere an zeitunabhängigen Ersten Integralen zeitunabhängiger Gleichungen

$$(d) \quad \frac{dx}{dt} = f(x | \lambda)$$

interessiert. Wir nehmen also an, eine zeitunabhängige Funktion $\Phi(x | \lambda)$ sei gegeben derart, dass $\Phi(x | o)$ ein Erstes Integral der Differentialgleichung

$$(e) \quad \frac{dt}{dx} = f(x | o)$$

ist. Ihre allgemeine Lösung $\varphi(\overset{\circ}{x}, t | o)$ mit $\varphi(\overset{\circ}{x}, o | o) = \overset{\circ}{x}$ ist als bekannt vorausgesetzt. Die Aufgabe ist, wenn möglich, ein Erstes Integral $\Psi(x | \lambda)$ der Gleichung (d) so zu bestimmen, dass

$$\Psi(x | o) = \Phi(x | o).$$

5.2. Hierfür setzen wir

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{x} = \{x_k\}_{k=1}^{n-1}, & x = (\tilde{x}, x_n), \\ \tilde{f}_k = f_k/f, \quad k = 1, \dots, n-1; & \tilde{f} = \{\tilde{f}_k\}_{k=1}^{n-1}, \\ \tilde{f}(x | \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \tilde{f}^{(\alpha)}(x) \end{array} \right.$$

und ersetzen die Annahmen des § 2 bezüglich der Funktionen $f_1, \dots, f_n$ durch die folgende Voraussetzung: Die Funktionen $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-1}, 1/f_n$ seien für

$$\tilde{x} \in U_{\rho}^{(n-1)}(\tilde{X}) \quad , \quad x_n \in U_{\rho}^{(1)}(o) \quad , \quad \lambda \in U_{\sigma}^{(1)}(o)$$

definiert, holomorph und durch 1 beschränkt. Dabei ist $\tilde{X}$ ein Gebiet des Raumes C^{n-1} .

Dann ist die Gleichung § 5.1 (d) mit dem Gleichungssystem

$$(d_1) \quad \frac{d\tilde{x}}{dx_n} = \tilde{f}(\tilde{x}, x_n | \lambda),$$

$$(d_2) \quad \frac{dt}{dx_n} = \frac{1}{f_n(\tilde{x}, x_n | \lambda)}$$

äquivalent. Da wir uns hier nur für die zeitunabhängigen Ersten Integrale der Gleichung § 5.1 (d) interessieren, so genügt es, die Gleichung (d₁) allein zu betrachten. Jedes ihrer Ersten Integrale ist ein zeitunabhängiges Integral der Gleichung § 5.1 (d), und umgekehrt. Es sei nun

$$\varphi(\overset{\circ}{x}, t | \lambda) = \{\varphi_k(\overset{\circ}{x}, t | \lambda)\}_{k=1}^n$$

die allgemeine Lösung der Gleichung § 5.1 (d) mit der Anfangsbedingung $\varphi(\overset{\circ}{x}, 0 | \lambda) = \overset{\circ}{x}$, und $\chi(\overset{\circ}{x}, x_n | \lambda)$ sei die wegen (d₂) eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$x_n = \varphi_n(\overset{\circ}{x}, 0, t | \lambda)$$

nach t . Dann lautet die allgemeine Lösung der Gleichung (d₁)

$$\underset{\text{Def.}}{\tilde{\varphi}}(\overset{\circ}{x}, x_n | \lambda) = \{\varphi_k(\overset{\circ}{x}, 0, \chi(\overset{\circ}{x}, x_n | \lambda) | \lambda)\}_{k=1}^{n-1}.$$

5.3. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich nun nach § 4.1:

Es sei $\Phi(\tilde{X} | \lambda)$ eine auf $U_\rho^{(n-1)}(\tilde{X}) \times U_\rho^{(1)}(0) \times U_\sigma^{(1)}(0)$ erklärte holomorphe Funktion derart, dass $\Phi(x | 0)$ ein Erstes Integral der Differentialgleichung

$$(e) \quad \frac{dx}{dt} = f(x | 0)$$

ist. Dann gibt es genau ein für

$\tilde{x} \in U_\rho^{(n-1)}(\tilde{X})$, $x_n \in U_\rho^{(1)}(0)$, $\lambda \in U_\sigma^{(1)}(0)$, $|x_n - \overset{\circ}{x}_n|$ hinreichend klein erklärtes holomorphes Erstes Integral $\Psi(x | \lambda)$ der Differentialgleichung

$$(d) \quad \frac{dx}{dt} = f(x | \lambda)$$

derart, dass

$$\Psi(x | 0) = \Phi(x | 0)$$

und

$$\Psi(\tilde{x}, 0 | \lambda) = \Phi(\tilde{x}, 0 | \lambda).$$

Es ist gegeben durch

$$\Psi(x | \lambda) = \Phi(\tilde{\varphi}(\tilde{x}, -x_n | \lambda), 0 | \lambda).$$

5.4. Es sei nun $\tilde{Y}$ irgendeine kompakte Teilmenge der abgeschlossenen Hülle von $\tilde{X}$ in C^{n-1} , ρ' und σ' seien wieder beliebige positive Zahlen $< \rho$ bzw. $< \sigma$, und $\tilde{F}_0$ sei die Menge aller $(\tilde{x}, x_n, \lambda)$, für welche

$$\tilde{x} \in \tilde{Y}, \quad |x_n| \leq \frac{1}{2} \rho' \quad \text{und} \quad |\lambda| \leq \sigma'.$$

Dann gibt nach § 4.2: Das Erste Integral $\Psi(x | \lambda)$ lässt sich in eine Potenzreihe nach λ entwickeln, welche für alle $(\tilde{x}, x_n, \lambda) \in \tilde{F}_0$ absolut und gleichmässig konvergiert.

Und schliesslich folgt aus § 4.4: *Die Koeffizienten $\Psi^{(\alpha)}$ der Potenzreihen-Entwicklung*

$$\Psi(x|\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \Psi^{(\alpha)}(x)$$

sind rekursiv gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(0)}(x) = \Phi(x|0), \\ \Psi^{(\alpha)}(x) = \Phi^{(\alpha)}(\tilde{\varphi}^{(0)}(\tilde{x}, -x_n), 0) - \\ \quad - \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^n \int_0^t \tilde{f}_k^{(\alpha-\beta)}(\tilde{\varphi}^{(0)}(\tilde{x}, \tau - x_n), \tau) \cdot \Psi^{(\beta)}(\tilde{\varphi}^{(0)}(\tilde{x}, \tau - x_n), \tau) d\tau. \end{array} \right.$$

Dabei ist gesetzt:

$$\tilde{\varphi}^{(0)}(x) = \tilde{\varphi}(x|0) \quad , \quad \Psi_k^{(\beta)}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi^{(\beta)}(x) \quad (\text{Def.})$$

und

$$\Phi(x|\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{\alpha} \Phi^{(\alpha)}(x).$$

LITERATUR

- [1] KURTH R. (1952) - *Das Anfangswertproblem der Stelldynamik*, «Z. f. Astrophysik», 30, 213-229.
- [2] KURTH R. (1971) - *Formal First Integrals of Ordinary Differential Equations*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», ser. II, 20, 43-52.