
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

TOADER JUCAN

**Opérateurs pseudo-différentiels partiellement forts
pseudo-locaux et partiellement forts hypoelliptiques**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.2, p. 108–115.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_2_108_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Opérateurs pseudo-différentiels partiellement forts pseudo-locaux et partiellement forts hypoelliptiques.* Nota di TOADER JUCAN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — In questa Nota si studia il problema della pseudo-località e della ipo-ellitticità parziale forte relativo ad operatori pseudo-differenziali. Sono ottenute condizioni sufficienti affinché un tale operatore sia pseudo-locale, parziale forte oppure ipo-ellittico parziale forte.

Dans cette Note nous nous occupons du problème de la pseudo-localité partielle forte et de l'hypoellipticité partielle forte des opérateurs pseudo-différentiels. Le problème de l'hypoellipticité partielle forte (presque hypoellipticité) a été considéré par R. J. Elliott [2], pour des opérateurs différentiels à coefficients constants. Ces derniers temps, MM. V. Iftimie et Y. Dermenjian [5] ont obtenu des résultats dans le même domaine, mais avec l'hypothèse que l'opérateur pseudo-différentiel est à support propre, hypothèse qui ne nous est pas utile.

PRÉLIMINAIRES

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et notons $x' = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_n)$ et $x = (x', x'')$.

DÉFINITION. Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est appelée fortement régulière par rapport à x' si, pour chaque ensemble relativement compact $K \subset \Omega$, il existe un entier k tel que, pour chaque multi-indice $p = (p_1, p_2, \dots, p_r)$, $D_x^p u$ est d'ordre $\leq k$ en K .

L. Schwartz en [4] donne pour les distributions fortement régulières par rapport à x' les caractérisations exprimées par:

LEMME 1. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution u soit fortement régulière par rapport à x' est que pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ il existe des fonctions $g_q(x', x'')$ telles que*

$$\varphi u = \sum_{|q| \leq k} D_{x''}^q g_q(x', x''),$$

où $g_q(x', x'')$ sont des fonctions à support compact, arbitrairement différentiables par rapport à x' de sorte que chaque dérivée par rapport à x' soit fonction continue de x' et x'' .

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1975.

LEMME 2. Une distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est fortement régulière en x' si et seulement s'il y a $t \in \mathbb{R}$ de sorte que $u \in H^{s,t}$ pour tous $s \in \mathbb{R}$.

Considérons des opérateurs pseudo-différentiels définis par:

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \tilde{u}(\xi) d\xi,$$

$a(x, \xi)$ étant le symbole de ces opérateurs.

Supposons que ce symbole $a(x, \xi)$ satisfait aux conditions suivantes:

$$1) \quad a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n),$$

$$2) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, x} |a(x, \xi)| (1 + |\xi'|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \text{ où } 0 \leq \delta < \rho \leq 1 \text{ et } |\xi| \geq A_x,$$

3) Pour chaque compact $K \subset \Omega$ il y a les constantes non-négatives $m(K)$, $C_1(K)$ et $C_2(K) > 0$ de sorte qu'on ait

$$C_2(K) (1 + |\xi|)^{-m(K)} \leq |a(x, \xi)| \leq C_1(K) (1 + |\xi|)^{m(K)}.$$

DÉFINITION. On dit que l'opérateur pseudo-différentiel A a les ordres r_1, r_2 relativement à x' et x'' respectivement si l'inégalité:

$$\|Au\|_{s_1, s_2} \leq C_{s_1, s_2} \|u\|_{s_1 + r_1, s_2 + r_2}$$

est satisfaite.

DÉFINITION. On dit que l'opérateur pseudo-différentiel A est partiellement fortement pseudo-local, si le fait que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est fortement régulière relativement à x' en $\omega \subset \subset \Omega$ entraîne que Au est fortement régulière relativement à x' en ω .

LA PSEUDO-LOCALITÉ PARTIELLEMENT FORTE DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

LEMME 1.1. Si le symbole $a(x, \xi)$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3), alors, quelles que soient les fonctions $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ à supports disjoints à distance $d > 0$ l'une de l'autre et quel que soit $s \in \mathbb{R}$ pour $t \in \mathbb{R}$, t fixé, on a:

$$(1.1) \quad |(Au, v)| \leq C \|u\|_{s, t} \|v\|_{s, -t+m+n+1}.$$

Démonstration. La démonstration de ce Lemme est analogue à la démonstration du Lemme 3.2 d'Egorov [1]. Pour cette raison nous la donnons seulement en abrégé.

On considère la fonction $J(x) \in C_0^\infty(|x| < d)$ et $J(x) = 1$, pour $|x| < d/2$; d'après [1], elle a les propriétés suivantes:

$$(1.2) \quad \iiint \tilde{J}(\xi - \tau) \tilde{a}(\eta - \xi, \tau) \tilde{u}(\xi) \tilde{v}(\eta) d\xi d\eta d\tau = 0,$$

$$(1.3) \quad (2\pi)^{-n} \int \tilde{J}(\xi - \tau) d\tau = 1$$

et

$$(1.4) \quad (2\pi)^{-n} \int \tilde{J}(\xi - \tau) (\tau - \xi)^\alpha d\tau = D^\alpha J(0) = 0 \quad \text{pour } |\alpha| \neq 0.$$

En utilisant ces propriétés on obtient:

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int \tilde{Au}(\eta) \tilde{v}(\eta) d\eta = (2\pi)^{-n} \iint \tilde{a}(\eta - \xi, \xi) \tilde{u}(\xi) \tilde{v}(\eta) d\xi d\eta = \\ &= (2\pi)^{-n} \iiint \tilde{J}(\xi - \tau) \left[\sum_{|\alpha|=N} (\tau - \xi)^\alpha D_\xi^\alpha \tilde{a}(\eta - \xi, \xi + \theta(\tau - \xi)) \right] \\ &\quad \tilde{u}(\xi) \tilde{v}(\eta) d\xi d\eta d\tau. \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions 1)-3) satisfaites par le symbole $a(x, \xi)$, on obtient l'évaluation

$$\begin{aligned} |(Au, v)| &\leq C \|u\|_{s,t} \|v\|_{s,-t+m+n+1} \iiint |\tilde{J}(\xi - \tau)|^2 (1 + |\tau - \xi|)^{2N+2pN-2l\delta} \\ &\quad (1 + |\eta - \xi|)^{-2l+2|s|+|2m+n+1-t|+n+1} (1 + |\xi'|)^{-2pN+2l\delta-4s+2n+2} \\ &\quad (1 + |\xi''|)^{-n-1} (1 + |\xi'''|)^{-n-1} (1 + |\eta'|)^{-n-1} (1 + |\eta''|)^{-n-1} d\xi d\eta d\tau, \end{aligned}$$

et d'ici on obtient l'inégalité (1.1) si on choisit

$$l > \left[\frac{2s + |2m + n + 1 - t| + n + 1}{2} \right] + 1 \quad \text{et} \quad N > \left[\frac{2l\delta - 4s + 2n + 2}{2p} \right] + 1.$$

En complétant l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme de H^{s_1, s_2} , on obtient l'évaluation (1.1) pour les distributions de H^{s_1, s_2} .

THÉORÈME 1.1. Si $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $a(x, \xi)$ satisfait aux conditions 1)-3), alors Au est une distribution partiellement fortement régulière à l'extérieur du support de u .

Démonstration. Soit $x_0 \in \omega$, où $\omega \subset \subset \text{supp } u$. Choisissons $\omega_1 \subset \omega$ tel que $x_0 \in \omega_1 \subset \omega$ et $\psi(x) \in C_0^\infty(\omega_1)$ avec $\psi(x) = 1$ sur ω_2 , où $x_0 \in \omega_2 \subset \subset \omega_1$. Puisque $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ il résulte qu'il existe s, t de sorte que $u \in H^{s, t}$. En appliquant l'inégalité (1.1) on a pour tous les $r \leq s$.

$$|(\psi Au, v)| = |(Au, \psi v)| \leq C \|u\|_{r,t} \|v\|_{r,-t+m+n+1} \leq C_1 \|v\|_{r,-t+m+n+1},$$

d'où il résulte que $Au \in H^{-r, t-m-n-1}$ et par conséquent $\psi Au \in H^{p, \tilde{t}} \forall p \in \mathbb{R}$ et $\tilde{t} \in \mathbb{R}, \tilde{t}$ fixé.

Puisque $\psi(x) = 1$ sur ω_2 , il résulte que Au est partiellement fortement régulière en ω_2 . Comme ω est arbitraire et $\omega \subset \subset \text{supp } u$ il résulte que Au est partiellement fortement régulière à l'extérieur du support de u .

THÉORÈME 1.2. Si $a(x, \xi)$ satisfait aux conditions 1)-3), $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et u est partiellement fortement régulière en $\omega \subset \Omega$, alors Au est partiellement fortement régulière en ω .

Démonstration. Soit $\psi(x) \in C_0^\infty(\omega)$ et $\psi(x) = 1$ en ω_1 avec $\omega_1 \subset\subset \omega$. Du fait que u est partiellement fortement régulière en ω , il résulte que ψu est partiellement fortement régulière en ω , d'où il résulte que $\psi u \in H^{s, t}$ quel que soit $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, t fixé.

Posons $Au = A(1 - \psi)u + A\psi u$. Puisque $(1 - \psi)u = 0$ en ω_1 , il résulte que $A(1 - \psi)u$ est partiellement fortement régulière en ω_1 .

Il reste à démontrer que $A\psi u$ est partiellement fortement régulière en ω_1 . A ce but considérons $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ et $\varphi(x) = 1$ pour $x \in \omega_1$, alors on a $\varphi A\psi u \in \mathcal{E}'(\omega)$ et:

$$\begin{aligned} \|\varphi A\psi u\|_{p, t}^2 &= \int (1 + |\xi'|^2)^p (1 + |\xi''|^2)^t |\widehat{\varphi A\psi u}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \int (1 + |\xi'|^2)^p (1 + |\xi''|^2)^t \left| \int \widehat{\varphi a}(\xi - \eta, \eta) \widehat{\psi u}(\eta) d\eta \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

En évaluant $\widehat{\varphi a}(\xi - \eta, \eta)$, on obtient:

$$\|\varphi A\psi u\|_{p, t}^2 \leq C \|\psi u\|_{p+m+n+1+\rho l, t+m+n+1}, \quad \text{où } l \geq [|p| + |t| + n + 1] + 1$$

et en choisissant $t = t - m - n - 1$ il résulte:

$$\|\varphi A\psi u\|_{p, t}^2 \leq C \quad \text{quel que soit } p \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}, t \text{ fixé;}$$

il suit que $\varphi A\psi u \in H^{p, t}$ quel que soit $p \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, t fixé.

Puisque $\varphi(x) = 1$ pour $x \in \omega_1$, il résulte que $A\psi u$ est partiellement fortement régulière en ω_1 .

L'HYPONELLIPTICITÉ PARTIELLEMENT FORTE DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

Soit $\psi(\xi)$ une fonction avec $\psi(\xi) = 1$ pour $|\xi| > R + 1$, $\psi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq R$, $\psi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $0 \leq \psi(\xi) \leq 1$, et supposons que le symbole $a(x, \xi)$ ne s'annule pas pour $|\xi| > R$.

A l'aide de la fonction $\psi(\xi)$ et $\gamma(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ construisons les fonctions:

$$q_0(x, \xi) a(x, \xi) = \psi(\xi),$$

$$q_1(x, \xi) a(x, \xi) = - \sum_{|\alpha|=1}^{N_0} D_\xi^\alpha q_0(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)),$$

.....

$$q_{j+1}(x, \xi) a(x, \xi) = - \sum_{|\alpha|=1}^{N_j} D_\xi^\alpha q_j(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)) \quad \text{où } j \geq 0$$

LEMME 2.1. Les fonctions $q_j(x, \xi)$ définies ci-dessus satisfont aux évaluations suivantes:

$$(2.1) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta q_j(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, x, j} (1 + |\xi'|)^{-\rho(|\alpha|+j) + \delta(|\beta|+j)} |a(x, \xi)|,$$

$$(2.2) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta q_j(x, \xi)| \leq C'_{\alpha, \beta, x, j} (1 + |\xi'|)^{-\rho(|\alpha|+j) + \delta(|\beta|+j)} \cdot (1 + |\xi|)^m,$$

$$(2.3) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta q_j(x, \xi)| \leq C''_{\alpha, \beta, x, j} (1 + |\xi'|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} \cdot (1 + |\xi|)^m.$$

Démonstration. La démonstration de ce Lemme suit la même voie que la démonstration du théorème analogue de [3] et c'est pourquoi on l'omet.

LEMME 2.2. Soient A et Q des opérateurs pseudo-différentiels ayant respectivement les symboles $a(x, \xi)$ et $q(x, \xi)$. Supposons que $a(x, \xi)$ satisfait aux conditions 1)-3), $q(x, \xi)$ satisfait aux évaluations du Lemme 2.1 et soit $\gamma(x) \in C_0^\infty(\Omega)$; alors l'opérateur pseudo-différentiel $u \rightarrow Q\gamma Au$ a le symbole

$$(2.4) \quad \sum_{|\alpha|=0}^N \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha q(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)) + t_N(x, \xi),$$

et l'ordre partiel relativement à x' de l'opérateur T_N , dont le symbole est $t_N(x, \xi)$ tend vers $-\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$ (l'ordre partiel de T_N relatif à x'' est constant).

Démonstration. Le fait que l'opérateur $Q\gamma A$ a le symbole donné par la formule (2.4) se vérifie immédiatement (voir [1]).

En tenant compte de la définition des opérateurs pseudo-différentiels, on a:

$$Q\gamma Au(x) = (2\pi)^{-n} \iiint q(x, \eta + \xi) r(y, \eta) e^{i\langle x-y, \xi \rangle} e^{i\langle x, \eta \rangle} \tilde{u}(\eta) dy d\xi d\eta.$$

Dans (2.4), $t_N(x, \xi)$ est donné par

$$(2.5) \quad t_N(x, \eta) = \int \tilde{t}_N(x, \xi, \eta) \tilde{r}(\xi, \eta) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi,$$

où

$$\tilde{t}_N(x, \xi, \eta) = \sum_{|\alpha|=N+1} D_\eta^\alpha q(x, \eta + \theta\xi) \xi^\alpha \quad \text{et} \quad r(x, \eta) = \gamma(x) a(x, \eta).$$

Il faut montrer maintenant que l'ordre partiel relatif à x' de l'opérateur

$$T_N u(x) = (2\pi)^{-n} \iiint \tilde{t}_N(x, \xi, \eta) \tilde{r}(\xi, \eta) e^{i\langle x, \xi + \eta \rangle} \tilde{u}(\eta) d\xi d\eta$$

tend vers $-\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$. Pour ce faire évaluons le symbole de cet opérateur:

$$\left| \int \tilde{t}_N(x, \xi, \eta) \tilde{r}(\xi, \eta) e^{i\langle x, \xi + \eta \rangle} d\xi \right| \leq C (1 + |\eta'|)^{-\rho(N+1) + \delta l + 2m} \\ (1 + |\eta''|)^{2m} \int (1 + |\xi|)^{N+1-l+m+\rho(N+1)} d\xi.$$

Afin que l'intégrale existe, il faut choisir l de manière que

$$(2.5) \quad (N+1)(\rho+1) - l + m < -n.$$

Enfin il faut démontrer encore que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on peut choisir N suffisamment grand tel qu'on ait:

$$(2.6) \quad -\rho(N+1) + \delta l + 2m < s.$$

De (2.5) et (2.6) on déduit que $(N+1)(\delta\rho + \delta - \rho) + (2 + \delta)m + n\delta < s$. Afin que cette relation soit possible il faut que $\delta\rho + \delta - \rho < 0$, d'où il résulte $\delta < \rho/(1 + \rho)$.

De cette manière on peut déterminer N et l suffisamment grands de sorte que les relations (2.5) et (2.6) soient satisfaites.

On observe que l'ordre de T_N en x'' est constant quel que soit $s \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION. Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est appelé partiellement fortement hypoelliptique relatif à x' sur Ω si pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout ouvert $\omega \subset \subset \Omega$, le fait que Au est partiellement fortement régulier relatif à x' implique que u est partiellement fortement régulier en x' .

THÉOREME 2.1. *L'opérateur pseudo-différentiel A à symbole $a(x, \xi)$ qui satisfait aux conditions 1)-3) est partiellement fortement hypoelliptique relativement à x' .*

Démonstration. Soit $\omega \subset \subset \Omega$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Considérons la fonction $\gamma(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\gamma(x) = 1$ pour $x \in \omega$; il résulte que la distribution $(\gamma u) \in \mathcal{E}'(\Omega)$. A l'aide des fonctions $\gamma(x)$, $\psi(\xi)$ et du symbole $a(x, \xi)$ construirons les fonctions suivantes:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} a(x, \xi) q_0(x, \xi) &= \psi(\xi) \\ a(x, \xi) q_1(x, \xi) &= - \sum_{|\alpha|=1}^{N_0} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha q_0(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)) \\ &\dots\dots\dots \\ a(x, \xi) q_{j+1}(x, \xi) &= - \sum_{|\alpha|=1}^{N_j} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha q_j(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)) \quad \text{pour } j \geq 0 \end{aligned}$$

où N_j sont des entiers positifs qui seront choisis plus loin.

Les égalités (2.7) peuvent être écrites sous la forme:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} a(x, \xi) q_0(x, \xi) &= \psi(\xi) \\ a(x, \xi) q_1(x, \xi) + \sum_{|\alpha|=0}^{N_0} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha q_0(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ a(x, \xi) q_{j+1}(x, \xi) + \sum_{|\alpha|=1}^{N_j} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha q_j(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)) &\quad \text{pour } j \geq 0. \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces égalités on obtient:

$$(2.9) \quad a(x, \xi) \gamma(x) [q_0(x, \xi) + \dots + q_j(x, \xi)] + a(x, \xi) q_{j+1}(x, \xi) + \\ + \sum_{|\alpha|=1}^{N_j} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha q_j(x, \xi) D_x^\alpha (\gamma(x) a(x, \xi)) + a(x, \xi) [q_0(x, \xi) + \\ + \dots + q_j(x, \xi)] (1 - \gamma(x)) = 1.$$

De (2.9) on obtient l'égalité des opérateurs

$$(2.10) \quad Q_j \gamma A + R_j + S_j - T_j = I$$

où:

Q_j est l'opérateur à symbole $q_0(x, \xi) + \dots + q_j(x, \xi)$;

A est l'opérateur à symbole $a(x, \xi)$;

R_j est l'opérateur à symbole $a(x, \xi) q_{j+1}(x, \xi) + 1 - \psi(\xi)$;

T_j est l'opérateur $T_{N_0} + T_{N_1} + \dots + T_{N_j}$ et

S_j est l'opérateur avec le symbole $a(x, \xi) [q_0(x, \xi) + \dots + q_j(x, \xi)] [1 - \gamma(x)]$.

Puisque $\gamma u \in \mathcal{E}'(R^n)$, il résulte qu'il existe σ, τ de sorte que $\gamma u \in H^{\sigma, \tau}$. Sur ω on a:

$$(2.11) \quad u = \gamma u = (Q_j \gamma A)(\gamma u) + (R_j + S_j - T_j)(\gamma u);$$

d'une manière analogue à celle utilisée au Théorème 1.2 on considère $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\varphi(x) = 1$ pour $x \in \omega$. Alors de (2.11) il résulte:

$$(2.12) \quad u = \varphi u = \varphi(\gamma u) = \varphi(Q_j \gamma A) \gamma u + \varphi(R_j + S_j - T_j)(\gamma u) \text{ sur } \omega.$$

Mais sur ω on a $S_j(\gamma u) = 0$ et $A(\gamma u) = Au - A(1 - \gamma)u$. De la propriété de pseudo-localité partiellement forte de l'opérateur A et du fait que Au est partiellement fortement régulier en ω , il résulte que $\varphi Q_j \gamma A(\gamma u)$ est partiellement fortement régulier en ω .

Démontrons maintenant que quel que soit $s \in R$, il existe $t \in R$, t fixé, tel que $\varphi \gamma u \in H^{s, t}$.

Du fait que $\varphi Q_j \gamma A(\gamma u)$ est partiellement fortement régulier il résulte que $\varphi Q_j \gamma A(\gamma u) \in H^{s, t_1}$. Choisissons j suffisamment grand de sorte que $(\varphi R_j)(\gamma u) \in H^{s, t_2}$. Cela est possible puisque comme il résulte immédiatement, l'ordre partiel relativement à x' de l'opérateur R_j tend vers $-\infty$ quand j tend vers $+\infty$. Nous allons choisir maintenant $N_0, N_1, \dots, N_j$ assez grands de manière que $(\varphi T_j)(\gamma u) \in H^{s, t_3}$. Notons $t = \min(t_1, t_2, t_3)$; il résulte alors que $\varphi \gamma u \in H^{s, t}$, et par suite que $\varphi \gamma u$ est partiellement fortement régulier. Puisque $u = \varphi \gamma u$ en ω , il résulte que u est partiellement fortement régulier en ω .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EGOROV JU. V. (1967) – *Hypoelliptic pseudo-differential operators*, « Trans. Moscow Mhat. Soc. », 16, 99.
- [2] ELLIOTT R. J. (1969) – *Almost hypoelliptic differential operators*, « Proc. London Math. Soc. », 19, 537.
- [3] HÖRMANDER L. (1961) – *Hypoelliptic differential operators*, « Ann. de l'Institut Fourier », 11, 477–492.
- [4] SCHWARTZ L. (1957) – *Distributions semi-régulières et changements de coordonnées*, « J. Math. Pures et Appl. », 36, 109.
- [5] Y. DERMENJIAN et V. IFTIMIE – *Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels presque-hypoelliptiques*, « C.R. Acad. Sc. Paris », 279, 507.