
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIERO CALDIROLA

Potenziali scalari nella relatività generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.1, p. 25–28.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_1_25_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Fisica teorica. — *Potenziali scalari nella relatività generale.* Nota (*)
del Corrisp. PIERO CALDIROLA.

SUMMARY. — Some different formulations, in the frame of general Relativity, of theories involving forces deriving from a scalar potential are examined. In particular a comparison is made of some of scalar forces as they result in a recent study carried on by us of the motion of a particle subject to the action of an "external" scalar field with those of the gravitation theory developed by Brans and Dicke and with those of an unified theory recently proposed by Dirac.

L'introduzione di un potenziale scalare nelle equazioni fondamentali della Relatività generale è stata considerata anche recentemente da vari Autori per scopi diversi. In questa Nota ci proponiamo un confronto critico del ruolo svolto dal potenziale scalare nei vari casi quando però ci si limita, per la descrizione dei fenomeni fisici, a una varietà a quattro dimensioni.

Il caso più semplice è quello in cui il campo scalare, che diremo «esterno», viene associato a forze di natura diversa sia dalle forze gravitazionali generate dalla presenza di masse materiali sia da quelle elettromagnetiche: è questa ad esempio la situazione che si verifica per un campo scalare che descriva le forze nucleari. In questo caso le equazioni del campo gravitazionale si scrivono:

$$(1) \quad G_{ik} = R_{ik} - g_{ik} R = -\kappa T_{ik}$$

dove i g_{ik} sono i coefficienti della forma fondamentale:

$$(2) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

e risultano determinati dal tensore energetico T_{ik} che è la somma di tre termini:

$$T_{ik} = T_{ik}^{(M)} + T_{ik}^{(em)} + T_{ik}^{(sc)}$$

dove $T_{ik}^{(M)}$ è il contributo dovuto alla distribuzione delle masse materiali, $T_{ik}^{(em)}$ quello dovuto al campo elettromagnetico e $T_{ik}^{(sc)}$ quello dovuto al campo scalare.

Prescindendo dall'espressione, del resto ben nota, dei tensori $T_{ik}^{(M)}$ e $T_{ik}^{(em)}$ ricordiamo solo che al campo scalare φ si può associare il tensore energetico:

$$T_{ik}^{(sc)} = \frac{1}{2} (\varphi_{,i} \varphi_{,k} + \mu^2 \varphi^2 \delta_{ik})$$

(*) Presentata nella seduta dell'11 gennaio 1975.

essendo μ un parametro da cui dipende il raggio d'azione delle forze che derivano dal potenziale scalare φ .

Una volta assegnati i tensori $T_{ik}^{(M)}$, $T_{ik}^{(em)}$, $T_{ik}^{(sc)}$ potranno essere calcolati, risolvendo le equazioni (1), i coefficienti g_{ik} della forma fondamentale (2). Noti questi, il moto di una particella di massa a riposo m_0 risulterà dato ⁽¹⁾ dal principio variazionale che generalizza quello della geodetica:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} (-m_0 + \alpha \varphi + e u_i \Phi^i) ds = 0$$

dove α è una costante che caratterizza l'accoppiamento tra la particella e il campo scalare, mentre il termine $e u_i \Phi^i$ è quello dovuto alle azioni elettromagnetiche.

Un secondo caso di teoria relativistica includente un campo scalare ci è fornito dalla teoria di Brans e Dicke ⁽²⁾. Il punto di partenza di questa teoria è l'idea di Mach che il fenomeno dell'inerzia trae origine dalle accelerazioni rispetto alla massa generale dell'universo, per cui la massa inerziale di una particella è da considerarsi, piuttosto che una costante fondamentale, la interazione di detta particella con una sorta di campo cosmico. Ne deriva che la costante universale G , che caratterizza la accelerazione gravitazionale di una particella, è legata al valor medio del campo scalare φ dalla relazione (sia pure approssimata):

$$\langle \varphi \rangle \simeq \frac{1}{G}.$$

In questa teoria le equazioni fondamentali (supponendo la materia non elettricamente carica) sono assunte nella forma seguente:

$$(3) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = - \frac{8\pi}{\varphi} [T_{ik}^{(M)} + T_{ik}^{(sc)}]$$

dove il tensore $T_{ik}^{(sc)}$ è determinato dall'equazione:

$$\left(R^i_k - \frac{1}{2} \delta^i_k R \right) \varphi_{/i} = - 8\pi T^{(sc)i}_{k/i}$$

che deriva dalla precedente tenendo conto delle identità di Bianchi. Con alcune ipotesi supplementari si arriva così a scrivere esplicitamente l'equazione fondamentale (3) della teoria di Brans e Dicke che risulta:

$$\begin{aligned} R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = & - \frac{8\pi}{\varphi} T_{ik}^{(M)} - \frac{\omega}{\varphi^2} \left(\varphi_{/i} \varphi_{/k} - \frac{1}{2} g_{ik} \varphi_{/r} \varphi^{/r} \right) - \\ & - \frac{1}{\varphi} (\varphi_{/ik} - g_{ik} \square^2 \varphi) \end{aligned}$$

(1) P. CALDIROLA, « Rend. Acc. Lincei », 56 (4), 575 (1974); id., 56 (5), 761 (1974).

(2) C. BRANS e R. H. DICKE, « Phys. Rev. », 124, 925 (1961).

essendo ω una costante numerica. Nella teoria in esame si assume inoltre

$$\square^2 \varphi = 4\pi\lambda T^{(M)i}_i,$$

con

$$\lambda = \frac{2}{3+2\omega},$$

la quale esprime fra l'altro che il potenziale scalare φ dà origine a forze a lungo raggio di azione.

Come equazione del moto di una particella di massa a riposo m_0 si prende poi quella espressa dal principio della geodetica:

$$(4) \quad \delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0.$$

È facile verificare che la teoria di Brans e Dicke si riduce per $\omega \rightarrow \infty$ alla ordinaria teoria einsteiniana della gravitazione.

Una terza teoria, che include un campo scalare nel campo gravitazionale di Einstein, è stata proposta recentemente da Dirac ⁽³⁾ attraverso un'estensione della teoria unitaria di Weyl ⁽⁴⁾ che si basa, come è noto, sull'introduzione di una geometria caratterizzata dal fatto che un campione di lunghezza varia da punto a punto del cronotopo. In questa nuova teoria, che si propone di superare alcune ben note obiezioni avanzate contro la teoria di Weyl mediante l'introduzione, nel principio variazionale che fornisce le equazioni del campo, di una funzione scalare φ che riveste il ruolo di moltiplicatore di Lagrange, le equazioni fondamentali si scrivono:

$$(5) \quad T^{(M)}_{ik} + T^{(em)}_{ik} = \varphi^2 (2R_{ik} - g_{ik}R) - 4g_{ik}\varphi^{/r}\varphi_{/r} + \\ + 4\varphi\varphi_{/ik} + 2g_{ik}\varphi^{/r}\varphi_{/r} - 8\varphi_{/i}\varphi_{/k}.$$

Si assume inoltre per il moto della particella il principio variazionale

$$(6) \quad \delta \int_{s_1}^{s_2} (-m_0\varphi + eu_i\Phi^i) ds = 0.$$

Si noti che, se si trascurano le azioni elettromagnetiche, le equazioni (5) del campo si riducono ad equazioni assai simili a quelle della teoria di Brans e Dicke, mentre sono sostanzialmente diverse le equazioni del moto di una particella assunte nelle due teorie, e cioè la (3) e la (6). Entrambe le equazioni sono pure sostanzialmente diverse dalla (2) relativa al moto di una particella in un campo gravitazionale e sotto l'azione di forze derivanti da un potenziale

(3) P. A. M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. London », A339, 403 (1973).

(4) H. WEYL, « Raum, Zeit, Materie », IV Auflage, Berlin 1921.

scalare φ . Infatti, nel caso della sola presenza del potenziale φ , per le tre teorie considerate, si hanno le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{array}{ll} 1) \text{ campo « esterno »} & \delta \int_{s_1}^{s_2} (m_0 - \alpha \varphi) ds = 0 \\ 2) \text{ teoria di Brans e Dicke} & \delta \int_{s_1}^{s_2} m_0 ds = \delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0 \\ 3) \text{ teoria di Dirac} & \delta \int_{s_1}^{s_2} m_0 \varphi ds = 0. \end{array}$$