Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mihai Dediu

Campi di vettori tangenti sullo spazio lenticolare $L^7(3)$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.1, p. 14–17.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_1_14_0>

Geometria differenziale. — *Campi di vettori tangenti sullo spazio lenticolare* $L^7(3)$. Nota di MIHAI DEDIU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — Dans cet travail nous allons construire des champs de vecteurs réguliers tangents à l'espace lenticulaire $L^7(3)$ en utilisant les octaves.

In [1], [2], [5], [7] l'Autore e G. Vranceanu hanno costruito uno o tre campi di vettori tangenti sugli spazi lenticolari. Nel presente lavoro verranno ottenuti campi di vettori tangenti allo spazio lenticolare $L^7(3)$, utilizzando la non commutatività del corpo delle ottave.

Ricordiamo [3] che lo spazio lenticolare

$$L^{2n+1}[p\,;p_0,\cdots,p_n]$$

si ottiene fattorizzando la sfera $S^{2n+1}\subset R^{2n+2}(x_0,\cdots,x_{2n+1})$

$$S^{2n+1}:\quad x_0^2+\cdots+x_{2n+1}^2=1$$

col gruppo discreto ciclico finito generato dalla rotazione

$$z'_h=z_h\,e^{\frac{2\pi i p_h}{p}}\qquad (h=0,1,\cdots,n\,;\ z_h=x_{2h}+ix_{2h+1})$$

dove p e p_h sono numeri interi primi fra loro. Gli spazi lenticolari di dimensione 7 non hanno tutti lo stesso numero massimo di campi di vettori tangenti; tale numero dipende infatti dai numeri p, p_0, p_1, p_2, p_3 [4].

Consideriamo lo spazio lenticolare

$$L^7[3\,;1,1,1,1]=L^7(3)$$

e l'immersione di esso nello spazio euclideo reale di dimensione 32

$$L^7(3)\subset R^{32}(v)$$

data delle formule (in coordinate complesse)

$$v_{hk}=z_h z_k^2\qquad (h,k=0,1,2,3)\,. \tag{1}$$

In coordinate reali queste si scrivono

$$\begin{aligned} &v_{hk}=u_{2h,2k}+iu_{2h+1,2k+1}=(x_{2h}+ix_{2h+1})(x_{2k}+ix_{2k+1})^2,\\ &u_{2h,2k}=x_{2h}x_{2k}^2-x_{2h}x_{2k+1}^2-2\,x_{2h+1}x_{2k}x_{2k+1}\,,\\ &u_{2h+1,2k+1}=2\,x_{2h}x_{2k}x_{2k+1}+x_{2h+1}x_{2k}^2-x_{2h+1}x_{2k+1}^2\,. \end{aligned} \tag{2}$$

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1975.

I relativi differenziali sono

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
\mathrm{d}u_{2h,2k} &= (x_{2k}^2 - x_{2k+1}^2)\,\mathrm{d}x_{2h} + 2\,(x_{2h}\,x_{2k} - x_{2h+1}\,x_{2k+1})\,\mathrm{d}x_{2k} - \\
&\quad - 2\,(x_{2h}\,x_{2k+1} + x_{2h+1}\,x_{2k})\,\mathrm{d}x_{2k+1} - 2\,x_{2k}\,x_{2k+1} + x_{2h+1}\,, \\
\mathrm{d}u_{2h+1,2k+1} &= 2\,x_{2k}\,x_{2k+1}\,\mathrm{d}x_{2h} + 2\,(x_{2h}\,x_{2k+1} + x_{2h+1}\,x_{2k})\,\mathrm{d}x_{2k} + \\
&\quad + 2\,(x_{2h}\,x_{2k} - x_{2h+1}\,x_{2k+1})\,\mathrm{d}x_{2k+1} + (x_{2k}^2 - x_{2k+1}^2)\,\mathrm{d}x_{2h+1}\,.
\end{aligned}
$$

Consideriamo adesso 7 campi di vettori tangenti alla sfera S^7, ottenuti moltiplicando l'ottava a destra con le unità dell'ottava [6]:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&1)\ \ \mathrm{d}x_0 = -x_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_1 = x_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_2 = x_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_3 = -x_2\,\mathrm{d}t\,,\\
&\quad\ \mathrm{d}x_4 = x_5\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_5 = -x_4\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_6 = -x_7\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_7 = x_6\,\mathrm{d}t\,.\\
&2)\ \ \mathrm{d}x_0 = -x_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_1 = -x_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_2 = x_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_3 = x_1\,\mathrm{d}t\,,\\
&\quad\ \mathrm{d}x_4 = x_6\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_5 = x_7\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_6 = -x_4\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_7 = -x_5\,\mathrm{d}t\,.\\
&3)\ \ \mathrm{d}x_0 = -x_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_1 = x_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_2 = -x_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_3 = x_0\,\mathrm{d}t\,,\\
&\quad\ \mathrm{d}x_4 = x_7\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_5 = -x_6\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_6 = x_5\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_7 = -x_4\,\mathrm{d}t\,.\\
&4)\ \ \mathrm{d}x_0 = -x_4\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_1 = -x_5\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_2 = -x_6\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_3 = -x_7\,\mathrm{d}t\,,\\
&\quad\ \mathrm{d}x_4 = x_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_5 = x_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_6 = x_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_7 = x_3\,\mathrm{d}t\,.\\
&5)\ \ \mathrm{d}x_0 = -x_5\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_1 = x_4\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_2 = -x_7\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_3 = x_6\,\mathrm{d}t\,,\\
&\quad\ \mathrm{d}x_4 = -x_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_5 = x_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_6 = -x_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_7 = x_2\,\mathrm{d}t\,.\\
&6)\ \ \mathrm{d}x_0 = -x_6\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_1 = x_7\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_2 = x_4\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_3 = -x_6\,\mathrm{d}t\,,\\
&\quad\ \mathrm{d}x_4 = -x_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_5 = x_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_6 = x_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_7 = -x_1\,\mathrm{d}t\,.\\
&7)\ \ \mathrm{d}x_0 = -x_7\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_1 = -x_6\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_2 = x_5\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_3 = x_4\,\mathrm{d}t\,,\\
&\quad\ \mathrm{d}x_4 = -x_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_5 = -x_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_6 = x_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}x_7 = x_0\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

In coordinate complesse si ha

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&1)\ \ \mathrm{d}z_0 = iz_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_1 = -iz_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_2 = -iz_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_3 = iz_3\,\mathrm{d}t\,.\\
&2)\ \ \mathrm{d}z_0 = -z_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_1 = z_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_2 = z_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_3 = -z_2\,\mathrm{d}t\,.\\
&3)\ \ \mathrm{d}z_0 = iz_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_1 = iz_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_2 = -iz_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_3 = -iz_2\,\mathrm{d}t\,.\\
&4)\ \ \mathrm{d}z_0 = -z_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_1 = -z_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_2 = z_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_3 = z_1\,\mathrm{d}t\,.\\
&5)\ \ \mathrm{d}z_0 = iz_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_1 = iz_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_2 = iz_0\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_3 = iz_1\,\mathrm{d}t\,.\\
&6)\ \ \mathrm{d}z_0 = -\bar{z}_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_1 = \bar{z}_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_2 = -\bar{z}_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_3 = \bar{z}_0\,\mathrm{d}t\,.\\
&7)\ \ \mathrm{d}z_0 = -i\bar{z}_3\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_1 = i\bar{z}_2\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_2 = -i\bar{z}_1\,\mathrm{d}t\,,\ \ \mathrm{d}z_3 = i\bar{z}_0\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo subito che i campi 6) e 7) non sono invarianti rispetto al gruppo lenticolare dello spazio lenticolare $L^7(3)$ (in quanto vengono utilizzate le coniugate delle coordinate complesse z_0, z_1, z_2, z_3). Si verifica invece facilmente che i primi cinque campi sono invarianti rispetto al gruppo lenticolare dello $L^7(3)$.

Tenendo conto della regolarità dell'immersione (1), risulta che, usufruendo delle (4), (3), otteniamo 5 campi di vettori tangenti sullo spazio lenticolare $L^7(3)$.

Consideriamo poi un altro sistema di 7 campi tangenti alla sfera S^7, ottenuto moltiplicando l'ottava a sinistra con la sua unità. Si ha

$$\begin{array}{lll}
 & 1) & dx_0 = -x_1\,dt\,,\quad dx_1 = x_0\,dt\,,\quad dx_2 = -x_3\,dt\,,\quad dx_3 = x_2\,dt\,,\\
 & & dx_4 = -x_5\,dt\,,\quad dx_5 = x_4\,dt\,,\quad dx_6 = x_7\,dt\,,\quad dx_7 = -x_6\,dt\,.\\
 & 2) & dx_0 = -x_2\,dt\,,\quad dx_1 = x_3\,dt\,,\quad dx_2 = x_0\,dt\,,\quad dx_3 = -x_1\,dt\,,\\
 & & dx_4 = -x_6\,dt\,,\quad dx_5 = -x_7\,dt\,,\quad dx_6 = x_4\,dt\,,\quad dx_7 = x_5\,dt\,.\\
 & 3) & dx_0 = -x_3\,dt\,,\quad dx_1 = -x_2\,dt\,,\quad dx_2 = x_1\,dt\,,\quad dx_3 = x_0\,dt\,,\\
 & & dx_4 = -x_7\,dt\,,\quad dx_5 = x_6\,dt\,,\quad dx_6 = -x_5\,dt\,,\quad dx_7 = x_4\,dt\,.\\
(6) & 4) & dx_0 = -x_4\,dt\,,\quad dx_1 = x_5\,dt\,,\quad dx_2 = x_6\,dt\,,\quad dx_3 = x_7\,dt\,,\\
 & & dx_4 = x_0\,dt\,,\quad dx_5 = -x_1\,dt\,,\quad dx_6 = -x_2\,dt\,,\quad dx_7 = -x_3\,dt\,.\\
 & 5) & dx_1 = -x_5\,dt\,,\quad dx_1 = -x_4\,dt\,,\quad dx_2 = x_7\,dt\,,\quad dx_3 = -x_6\,dt\,,\\
 & & dx_4 = x_1\,dt\,,\quad dx_5 = x_0\,dt\,,\quad dx_6 = x_3\,dt\,,\quad dx_7 = -x_2\,dt\,.\\
 & 6) & dx_0 = -x_6\,dt\,,\quad dx_1 = -x_7\,dt\,,\quad dx_2 = -x_4\,dt\,,\quad dx_3 = x_5\,dt\,,\\
 & & dx_4 = x_2\,dt\,,\quad dx_5 = -x_3\,dt\,,\quad dx_6 = x_0\,dt\,,\quad dx_7 = x_1\,dt\,.\\
 & 7) & dx_0 = -x_7\,dt\,,\quad dx_1 = x_6\,dt\,,\quad dx_2 = -x_5\,dt\,,\quad dx_3 = -x_4\,dt\,,\\
 & & dx_4 = x_3\,dt\,,\quad dx_5 = x_2\,dt\,,\quad dx_6 = -x_1\,dt\,,\quad dx_7 = x_0\,dt\,.
\end{array}$$

In coordinate complesse risulta

$$\begin{array}{lll}
 & 1) & dz_0 = iz_0\,dt\,,\quad dz_1 = iz_1\,dt\,,\quad dz_2 = iz_2\,dt\,,\quad dz_3 = -iz_3\,dt\,.\\
 & 2) & dz_0 = -\bar{z}_1\,dt\,,\quad dz_1 = \bar{z}_0\,dt\,,\quad dz_2 = -z_3\,dt\,,\quad dz_3 = z_2\,dt\,.\\
 & 3) & dz_0 = -i\bar{z}_1\,dt\,,\quad dz_1 = i\bar{z}_0\,dt\,,\quad dz_2 = iz_3\,dt\,,\quad dz_3 = iz_2\,dt\,.\\
(7) & 4) & dz_0 = -\bar{z}_2\,dt\,,\quad dz_1 = z_3\,dt\,,\quad dz_2 = \bar{z}_0\,dt\,,\quad dz_3 = -z_1\,dt\,.\\
 & 5) & dz_0 = -i\bar{z}_2\,dt\,,\quad dz_1 = iz_3\,dt\,,\quad dz_2 = i\bar{z}_0\,dt\,,\quad dz_3 = -iz_1\,dt\,.\\
 & 6) & dz_0 = -z_3\,dt\,,\quad dz_1 = -\bar{z}_2\,dt\,,\quad dz_2 = \bar{z}_1\,dt\,,\quad dz_3 = z_0\,dt\,.\\
 & 7) & dz_0 = iz_3\,dt\,,\quad dz_1 = -i\bar{z}_2\,dt\,,\quad dz_2 = i\bar{z}_1\,dt\,,\quad dz_3 = iz_0\,dt\,.
\end{array}$$

Osserviamo infine che solo il primo campo è invariato rispetto al gruppo lenticolare dello spazio lenticolare $L^7(3)$; dunque, usufruendo delle (6), (3), si può ottenere un solo campo di vettori tangenti ad $L^7(3)$.

Abbiamo così stabilito il seguente

TEOREMA. *Usufruendo delle ottave e relative unità, possiamo ottenere* 5 *campi di vettori tangenti sullo spazio lenticolare* $L^7(3)$ *se moltiplichiamo l'ottava a destra con le unità, e un solo campo di vettori tangenti ad* $L^7(3)$ *se moltiplichiamo a sinistra l'ottava con le unità.*

BIBLIOGRAFIA

[1] MIHAI DEDIU – *Campi di vettori tangenti sugli spazi lenticolari di dimensione tre* (apparirà).

[2] MIHAI DEDIU – *Tre campi di vettori tangenti sugli spazi lenticolari di dimensione* $4n+3$ (apparirà).

[3] MIHAI DEDIU (1969) – *On the lens spaces*, «Rev. Roum. Math. Pures et Appl.», *14*, 623–627.

[4] MIHAI DEDIU (1972) – *Sur quelques propriétés des espaces lenticulaires*, «Rev. Roum. Pures et Appl.», *17*, 871–874.

[5] G. VRANCEANU (1972) – *Vecteurs tangents aux espaces lenticulaires*, «Rev. Roum. Math. Pures et Appl.», *17*, 469–472.

[6] G. VRANCEANU (1965) – *Sur les vecteurs tangents aux sphères*, «Rev. Roum. Math. Pures et Appl.», *10*, 895–914.

[7] G. VRANCEANU e M. DEDIU (1972) – *Cîmpuri de vectori tangenţi la spaţiile lenticulare* $L^3[3;1,2]$ *şi* $L^3[3;1,1]$, «St. Cerc. Mat.» Tom., *24* (10), 1585–1600.