Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Raffaele Balli

Rotazioni non uniformi di un satellite in orbita circolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.6, p. 630–636.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_630_0>

Meccanica razionale. — *Rotazioni non uniformi di un satellite in orbita circolare.* Nota di RAFFAELE BALLI, presentata (*) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — We have examined the dynamic possibility for a satellite in circular orbit to make rotational motions around the centre of gravity.

We have been able to demonstrate the existence of a type of non-uniform rotations made up by rotations around a principal axis of inertia perpendicular to the orbital plane.

1. Il sistema di equazioni che regolano il moto di un satellite soggetto ad un campo centrale di forze di tipo newtoniano non è in generale decomponibile in sistemi indipendenti che descrivano separatamente il moto del baricentro ed il moto attorno al baricentro.

Si ottiene una parziale indipendenza nella approssimazione del secondo ordine, abituale in meccanica celeste; quando si trascurino nelle espressioni delle forze agenti i termini di secondo ordine nel rapporto tra il diametro del satellite e la sua distanza dal centro di attrazione ([1], cap. 7, § 20), il moto del baricentro risulta indipendente dal moto attorno al baricentro poiché la prima equazione cardinale è autonoma [2] ed individua moti Kepleriani.

Il moto attorno al baricentro risulta invece ancora dipendente dal moto del baricentro; le equazioni del moto attorno al baricentro assumono una forma più semplice se il moto del baricentro è circolare uniforme. Molte Note sono dedicate allo studio del moto attorno al baricentro in queste ipotesi e alla ricerca di possibili moti cinematicamente caratterizzati: sono stati determinati i moti rotatori e le possibili precessioni regolari nel caso giroscopico [3].

Ci si pone qui il problema di determinare tutti i possibili moti rotatori non necessariamente uniformi. Si dimostra l'esistenza di un'unica classe possibile di moti rotatori non uniformi costituita da rotazioni attorno ad un asse principale di inerzia disposto ortogonalmente al piano dell'orbita; in questa classe sono contenute le rotazioni uniformi già determinate da Bentsik.

2. Si assume come riferimento inerziale quello associato ad una terna trirettangola RC (Q, x, y, z) con centro nel polo di attrazione ed asse z parallelo alla velocità angolare $\boldsymbol{v}$ associata al moto circolare uniforme del baricentro del satellite: detto moto avviene nel piano xy. Il moto attorno al baricentro è regolato dalla seconda equazione cardinale che assume la forma ([1], cap. 7, § 20; [3]; [4]:

$$\sigma(\dot{\omega}) + \omega \times \sigma(\omega) = \eta \boldsymbol{c} \times \sigma(\boldsymbol{c}) . \tag{1}$$

essendo σ l'omografia centrale d'inerzia ed η una costante legata alla costante gravitazionale, alla massa del corpo attraente ed al raggio dell'orbita.

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1974.

Risulta utile anche il sistema differenziale che si ottiene dalle proiezioni della (1) su una terna $R\Gamma(G, \xi, \eta, \zeta)$ con l'asse ζ coincidente con l'asse di rotazione; questa terna può essere assunta, in tutta generalità, in modo tale che l'omografia d'inerzia rispetto a G assuma la forma ridotta:

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}.$$

Le dette equazioni (equazioni di Eulero) per moti rotatori attorno all'asse ζ assumono la forma:

$$(2) \qquad \begin{cases} -B'\dot\omega + A'\omega^2 = S \equiv \eta\,[c_2(-B'c_1 - A'c_2 + Cc_3) - c_3(Bc_2 - A'c_3)] \\ -A'\dot\omega - B'\omega^2 = T \equiv \eta\,[c_3(Ac_1 - B'c_3) - c_1(-B'c_1 - A'c_2 + Cc_3)] \\ C\dot\omega \qquad\qquad\quad = V \equiv \eta\,[c_1(Bc_2 - A'c_3) - c_2(Ac_1 - B'c_3)]\,. \end{cases}$$

Le equazioni di Poisson relative a $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\nu}$ sono:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot c_1 = \nu_2 c_3 + c_2(\omega - \nu_3) \\ \dot c_2 = -\nu_1 c_3 - c_1(\omega - \nu_3) \\ \dot c_3 = \nu_1 c_2 - \nu_2 c_1 \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \dot\nu_1 = +\,\omega\nu_2 \\ \dot\nu_2 = -\,\omega\nu_1 \\ \dot\nu_3 = 0\,. \end{cases}$$

Questo sistema ammette l'integrale primo dell'energia nel moto relativo:

$$(5) \qquad C\omega^2 + \eta J + 2\,B'\omega\nu_1 + 2\,A'\omega\nu_2 - 2\,C\omega\nu_3 = \lambda$$

con $J = Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2 - 2\,A'c_2c_3 - 2\,B'c_1c_3$ e gli integrali primi particolarizzati delle equazioni di Poisson:

$$(6) \qquad \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \nu_3 c_3 = 0$$

$$(7) \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

$$(8) \qquad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \nu^2.$$

3. Si cercano le eventuali soluzioni delle equazioni elencate trascurando sistematicamente quelle corrispondenti a moti rotatori uniformi; una prima limitazione è ottenuta direttamente da considerazioni sulla equazione vettoriale (1), gli sviluppi successivi sono invece condotti utilizzando le equazioni scalari. In ogni eventuale moto rotatorio è $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\,\boldsymbol{u}$ essendo $\boldsymbol{u}$ un versore fisso in RC. La funzione $\omega(t)$ varia in generale nel tempo mantenendosi però limitata in conseguenza della validità dell'integrale primo dell'energia nel moto relativo. Ci sono quindi degli istanti in cui $\omega(t)$ assume valori estremali,

oppure, se $\omega(t)$ è monotona, essa tende ad un valore limite finito. Negli istanti in corrispondenza ai quali $\omega(t)$ assume valori estremali è $\dot{\omega} = 0$ e dalla (1) si ottiene:

$$\boldsymbol{\omega} \times \sigma(\boldsymbol{\omega}) = \eta \boldsymbol{c} \times \sigma(\boldsymbol{c}).$$

La stessa equazione deve essere verificata asintoticamente nel caso in cui $\omega(t)$ risulti monotona e comporta la complanarità dei vettori $\boldsymbol{\omega}$, $\sigma(\boldsymbol{\omega})$, $\boldsymbol{c}$, $\sigma(\boldsymbol{c})$. Questa complanarità si verifica solamente per $\boldsymbol{c}$ parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$ se l'asse di rotazione non è contenuto in un piano centrale.

Infatti, quando $\boldsymbol{\omega}$ non sia contenuto in un piano centrale $\boldsymbol{\omega}$ e $\sigma(\boldsymbol{\omega})$ non sono certamente paralleli e la complanarità dei quattro vettori detti si traduce nella appartenenza di $\boldsymbol{c}$ e $\sigma(\boldsymbol{c})$ al piano individuato da $\boldsymbol{\omega}$ e $\sigma(\boldsymbol{\omega})$:

$$\boldsymbol{c} = \lambda' \boldsymbol{\omega} + \mu' \sigma(\boldsymbol{\omega}) \qquad \sigma(\boldsymbol{c}) = \lambda'' \boldsymbol{\omega} + \mu'' \sigma(\boldsymbol{\omega}).$$

Dalla prima di queste si ricava però:

$$\sigma(\boldsymbol{c}) = \lambda' \sigma(\boldsymbol{\omega}) + \mu' \sigma^2(\boldsymbol{\omega})$$

e quindi

$$\lambda'' \boldsymbol{\omega} + (\mu'' - \lambda') \sigma(\boldsymbol{\omega}) - \mu' \sigma^2(\boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Poiché $\boldsymbol{\omega}$ non è contenuto in un piano centrale, i tre vettori $\boldsymbol{\omega}$, $\sigma(\boldsymbol{\omega})$, $\sigma^2(\boldsymbol{\omega})$ non sono complanari e se ne deduce quindi che deve essere $\mu = 0$, $\mu'' = \lambda'$, $\lambda'' = 0$ e quindi in particolare $\boldsymbol{c} = \lambda' \boldsymbol{\omega}$.

Poiché l'appartenenza di $\boldsymbol{\omega}$ ad un piano centrale non può realizzarsi in un istante o asintoticamente se non realizzandosi costantemente ($\boldsymbol{\omega}$ ha direzione fissa nel corpo) gli eventuali moti dinamicamente possibili devono essere ricercati o tra quelli con $\boldsymbol{\omega}$ appartenente ad un piano centrale d'inerzia o tra quelli nei quali $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo al piano dell'orbita non essendo verificata la condizione precedente.

4. Sia dunque $\boldsymbol{\omega}$ parallelo al piano dell'orbita e non contenuto in un piano centrale; queste ipotesi si traducono nelle $\nu_3 = 0$ ed $A' \neq 0$, $B' \neq 0$.

Dalle prime due equazioni di Eulero è possibile allora ricavare

$$\dot{\omega} = \frac{-B'S - A'T}{A'^2 + B'^2} \qquad \omega^2 = \frac{A'S - B'T}{A'^2 + B'^2}$$

e sostituendo nella terza si ottiene:

$$-C(B'S + A'T) = V(A'^2 + B'^2)$$

e cioè esplicitando:

$$\begin{aligned}(9) \qquad & c_1^2(-CA'B') + c_1 c_2 [(A'^2 + B'^2)(A - B) + C(B'^2 - A'^2)] + \\ & + c_2^2(CA'B') + c_1 c_3 [CA'(C - A) + A'(A'^2 + B'^2)] + \\ & + c_2 c_3 [CB'(B - C) - B'(A'^2 + B'^2)] = 0.\end{aligned}$$

Dalle altre equazioni in cui si è posto $\nu_3 = 0$ è possibile ottenere una ulteriore relazione tra le sole componenti di $\boldsymbol{c}$. Si ricava infatti dalle (5) e (6)

$$\nu_1 = \frac{-c_2(\lambda - C\omega^2 - \eta J)}{2\omega(A' c_1 - B' c_2)} \qquad \nu_2 = \frac{c_1(\lambda - C\omega^2 - \eta J)}{2\omega(A' c_1 - B' c_2)}.$$

Sostituendo poi nella (8) ed utilizzando l'espressione di ω^2 si ottiene la relazione suddetta che ha la forma:

$$(10) \quad (c_1^2 + c_2^2)\left(\lambda - C\frac{-B'T + A'S}{A'^2 + B'^2} - \eta J\right)^2 = 4\left(\frac{-B'T + A'S}{A'^2 + B'^2}\right)(c_1 A - c_2 B')^2 \nu^2.$$

In $R^3(c_1, c_2, c_3)$ le equazioni (9), (10) e (7) individuano un sistema di tre superficie algebriche che sono rispettivamente un cono quadrico, una superficie del sesto ordine, una sfera. Poiché in ogni moto rotatorio del tipo in esame $\boldsymbol{c}$ non è costante in $R\Gamma$ ed assume i valori $P(0, 0, 1)$ e $P'(0, 0, -1)$, durante il moto l'estremo libero del versore $\boldsymbol{c}$ descrive un tratto reale della curva Φ comune a queste tre superficie e passante per i due punti P e P′. Questa curva Φ è algebrica in quanto intersezione di superficie algebriche, ed ha ordine non superiore a quattro. Essa ha intersezioni reali o complesse, proprie o improprie con ogni piano in numero uguale al suo ordine: queste intersezioni sono i punti comuni alle curve intersezioni delle superficie con il piano stesso. Il piano improprio in particolare interseca le superficie lungo le tre curve di equazione (9) e

$$(7') \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0$$

$$\begin{aligned}(10') \qquad c_3^2 \Psi^2 \equiv c_3^2 \{ & c_1^2 [A(A'^2 + B'^2) - B'^2 C] + \\ & + c_1 c_2(-2CA'B') + c_2^2[B(A'^2 + B'^2) - A'^2 C] + \\ & + c_1 c_3[-2B'(A'^2 + B'^2) - B'C(A - C)] + \\ & + c_2 c_3[-2A'(A'^2 + B'^2) + A'C(C - B)] + \\ & + c_3^2[2C(A'^2 + B'^2)]\}^2 = 0.\end{aligned}$$

Le intersezioni della conica (9) con la retta $c_3 = 0$ sono distinte dalle intersezioni della retta stessa con la conica (7′). Poiché le tre coniche (7′), (9) e $\Psi = 0$ non appartengono ad uno stesso fascio, come si riconosce con facilità, le tre curve considerate, delle quali la (7′) ha soltanto punti complessi, hanno in comune al più due punti.

La eventuale curva in comune alle tre superficie e quindi una parte della curva Φ_4 intersezione delle due superficie (7) e (9) e quindi la stessa Φ_4 deve spezzarsi in due coniche a coefficienti reali, una delle quali potrebbe essere la curva cercata Φ. Si tratta dunque di una curva piana che, dovendo stare sulla sfera (7) e passare per i punti P e P′, deve coincidere con l'intersezione della sfera con un piano π passante per detti punti e cioè per l'asse ζ. Al variare del tempo il versore $\boldsymbol{c}$ varia dunque in $R\Gamma$ mantenendosi in un piano π

solidale al corpo e passante per l'asse di rotazione. In ogni istante in cui $\boldsymbol{c}$ ed $\boldsymbol{\omega}$ non sono paralleli, il piano π deve dunque essere sovrapposto in RC al piano dell'orbita. Ne segue in definitiva che il moto si riduce alla quiete.

5. Rimane ora da esaminare il caso in cui $\boldsymbol{\omega}$ sia contenuto in un piano centrale d'inerzia; è possibile allora scegliere la terna RΓ solidale al corpo in modo tale che risulti $B' = 0$. Si riconosce che non sono possibili moti rotatori in cui $\boldsymbol{\omega}$ non è parallelo ad uno degli assi principali d'inerzia; supposto infatti $A' \neq 0$ è possibile ancora effettuare lo stesso procedimento di eliminazione di $\dot{\omega}$ e ω^2 delle equazioni di Eulero (nelle quali non compare ν_3) ottenendo

$$\omega^2 = \frac{S}{A'} = \frac{\eta}{A'}\left[-A' c_2^2 + A' c_3^2 + (C - B)\, c_2 c_3\right]$$

$$\dot{\omega} = \frac{T}{A'} = \frac{\eta}{A'}\, c_1 \left[A' c_2 + (A - C)\, c_3\right]$$

e quindi per la terza equazione si ottiene:

$$c_1 \left[c_2 A' (A - B - C) - c_3 (AC - C^2 - A'^2)\right] = 0.$$

Tralasciando di considerare l'eventualità che sia $c_1(t) \equiv 0$ perché questo porterebbe ad $\dot{\omega} = 0$ cioè ad un moto rotatorio uniforme, si ottiene:

$$c_2 = \mu c_3 \qquad \text{con} \quad \mu = \frac{A'^2 - C(A - C)}{A'(B - A + C)}$$

e quindi

$$\omega^2 = \rho^2 c_3^2 \qquad \text{con} \quad \rho = \left[\frac{\eta}{A'}\left(-A'\mu^2 + A' + C\mu - B\mu\right)\right].$$

Ponendo nella seconda equazione di Poisson relativa a $\boldsymbol{c}$, al posto di c_2 il suo valore in funzione di c_3 si ha:

$$\dot{c}_2 = -\nu_1 c_3 - c_1(\omega - \nu_3) = \mu \dot{c}_3$$

e dal confronto con la terza equazione si ottiene:

$$\nu_1(\mu^2 c_3 + c_3) + \nu_2(-\mu c_1) = -c_1 c_3 \rho + \nu_3 c_1 \tag{11}$$

che con la (6) permette di esprimere le componenti di $\boldsymbol{\nu}$ in funzione delle componenti di $\boldsymbol{c}$; risulta infatti [1]:

$$\nu_1 = -c_1 c_3^2 \rho \qquad \nu_2 = \mu^{-1}(c_1^2 c_3 \rho - \nu_3).$$

Sostituendo nella (8) e tenendo conto che $c_1^2 = 1 - (1 + \mu^2)\, c_3^2$ si ottiene:

$$F(c_3) \equiv a_0 c_3^6 + a_1 c_3^5 + a_2 c_3^4 + a_3 c_3^3 + a_4 c_3^2 + a_5 c_3 + a_6 = 0$$

(1) Quando fosse $\mu = 0$ e quindi $c_2 = 0$, dal confronto della (11) con la (6), si ottiene direttamente o $c_3 =$ costante (rotazioni uniformi) oppure $\rho = 0$ (quiete).

con:

$$a_0 = a_2 = \rho^2 (1 + \mu^2) \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_3 = 2\, \nu_3\, \rho\, (1 + \mu^2)$$

$$a_4 = \rho^2 \quad , \quad a_5 = 2\, \nu_3\, \rho \quad , \quad a_6 = \nu_3^2 - \mu^2 (v^2\, \nu_3^2).$$

Se non si annullano tutti i coefficienti di questa equazione, da essa si riconosce che durante il moto è: $c_3 =$ costante, e quindi per la (11) $\omega =$ costante. Se invece si annullano tutti i coefficienti, è in particolare: $\rho = 0$, e quindi per la (11) $\omega = 0$. L'eventuale moto è quindi rotatorio uniforme o si riduce alla quiete.

6. Moti rotatori non uniformi sono invece dinamicamente possibili quando l'asse di rotazione coincide con un asse centrale d'inerzia. In questo caso, essendo $A' = B' = 0$ le equazioni di Eulero assumono la forma semplificata:

$$(C - B)\, c_2\, c_3 = 0$$

$$(C - A)\, c_1\, c_3 = 0$$

$$C\dot{\omega} = \eta\, (B - A)\, c_1\, c_2 .$$

Escludendo il caso banale dell'elissoide centrale d'inerzia sferico, si riconosce che condizione necessaria per la possibilità dinamica di un moto rotatorio non uniforme è che $c_3(t) \equiv 0$. Durante il moto l'asse di rotazione si mantiene quindi ortogonale al piano dell'orbita; ne segue $\nu_1(t) \equiv \nu_2(t) \equiv 0$; e precisando il verso dell'asse ζ concordemente con quello di $\boldsymbol{v}$ è $\nu_3 = \nu$. Sotto tali condizioni risultano soddisfatte tutte le equazioni che regolano il moto se e solo le rimanenti incognite $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\omega(t)$ verificano il sistema di equazioni differenziali:

$$C\dot{\omega} = \eta\, (B - A)\, c_1\, c_2$$

$$\dot{c}_1 = c_2\, (\omega - \nu)$$

$$\dot{c}_2 = - c_1\, (\omega - \nu)$$

del quale vanno considerate le soluzioni con $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Questo sistema ammette, oltre l'integrale primo già indicato, l'integrale primo dell'energia nel moto relativo che ha la forma:

$$C\, (\omega - \nu)^2 + \eta\, (A c_1^2 + B c_2^2) - H' = 0 .$$

Escluso il caso $A = B$, in corrispondenza al quale si ottengono solo rotazioni uniformi, posto, senza ledere in generalità, $A > B$ sono dinamicamente possibili anche rotazioni non uniformi. Indicato con $\theta(t)$ l'anomalia dell'asse ξ rispetto al versore $\boldsymbol{c}$, risulta $\omega - \nu = \dot{\theta}$ e $c_1 = \cos\theta(t)$, $c_2 = \sin\theta(t)$. L'integrale primo dell'energia assume una forma del tutto analoga a quella del pendolo:

$$C\dot{\theta}^2 = H + \eta\, (A - B) \sin^2\theta$$

e consente di determinare con una quadratura la funzione $\theta(t)$.

I risultati, ben noti, relativi alla discussione con il metodo di Weierstrass, consentono di caratterizzare i diversi tipi di moti in relazione al valore della costante H. In particolare per $H = -\eta(A - B)$ si ottengono moti rotatori uniformi con velocità angolare $\omega = \nu$ e con asse ξ costantemente sovrapposto a $\boldsymbol{c}$; per $H = 0$ si ottengono o moti rotatori uniformi con velocità angolare $\omega = \nu$ e con asse ξ costantemente ortogonale a $\boldsymbol{c}$, oppure moti rotatori non uniformi che tendono asintoticamente a uno di questi. Per valori di H intermedi i moti possibili sono moti rotatori non uniformi oscillanti attorno alle rotazioni uniformi della prima classe.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. LEIMANIS (1965) - *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point*. Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York.

[2] P. BENVENUTI (1971) - *Sul moto del baricentro*, «Conf. Sem. Mat. Univ., Bari», *125*.

[3] E. BENTSIK (1967) - *Sui possibili moti semplici di un satellite artificiale soggetto a forze newtoniane*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», *39*.

[4] F. TISSERAND (1960) - *Traité de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris.