Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergio Bressan

Espressioni polinomiali dello stress per un continuo di Cosserat.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.6, p. 624–629.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_624_0>

Meccanica razionale. — *Espressioni polinomiali dello stress per un continuo di Cosserat.* Nota di SERGIO BRESSAN [(*)] presentata [(**)] dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — For a Cosserat continuous system with free rotations we determinate polynomial developments of the stress (stress and couples). We shall be able to consider them as polynomial approximations of the stress since we demonstrate that whatever may be the number of the terms that we regard, they satisfy conditions of integrability of the type of the De Saint-Venant classical ones.

È noto [(1)] il procedimento di integrazione relativo al problema dell'equilibrio di un corpo elastico omogeneo comunque connesso e vincolato che G. Grioli ha costruito nel caso classico di « stress » simmetrico.

Nel presente lavoro mi pongo nel caso di un continuo di Cosserat con lo scopo di precisare degli sviluppi polinomiali che potranno considerarsi come approssimazioni polinomiali dello stress (sforzi e coppie) e porsi alla base della costruzione di un analogo procedimento di integrazione del problema di equilibrio. La condizione fondamentale che giustifica quant'è ora affermato è che risulta possibile – come mostrerò – dimostrare che questi sviluppi polinomiali, qualunque sia il numero di termini che si tengono, soddisfano a condizioni di integrabilità del tipo di quelle classiche di De Saint-Venant.

È evidente l'importanza di questo fatto in quanto, qualunque sia l'ordine di approssimazione conseguito, è possibile risalire alle corrispondenti approssimazioni delle componenti di spostamento, condizione questa alla quale non può sfuggire ogni rappresentazione dello stress di qualunque tipo esso sia.

Si considererà il caso di corpi elastici linearizzati con eventuali vincoli in superficie. Nelle dimostrazione si suppone che il continuo ammetta rotazioni libere, ma è immediata l'estensione al caso di continui di Cosserat con rotazioni vincolate.

1. PRELIMINARI

Sia C la configurazione di equilibrio di un continuo di Cosserat e σ il suo contorno. Sia σ' la porzione di σ ove sono presenti i vincoli. Indico con F_r e $M_r (r = 1, 2, 3)$ le componenti, rispetto ad una prefissata terna cartesiana

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, per le applicazioni della matematica alla Fisica e all'Ingegneria del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1974.

(1) G. GRIOLI, *Proprietà di media e integrazione del Problema dell'elastostatica isoterma* « Annali di Matematica pura e applicata », ser. IV, 33 (1952).

trirettangola e levogira $0, x_1, x_2, x_3$, della forza e della coppia specifica di massa, e con f_r e m_r quelle della forza e della coppia specifica superficiale. Su $\sigma' f_r$ ed m_r hanno evidentemente il carattere di reazione vincolare. Se indico con X_{rs} le caratteristiche di tensione e con N_{rs} quelle di coppia, le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$(1) \qquad \begin{cases} X_{rs,s} = F_r \\ N_{rs,s} + e_{rpq} X_{qp} = M_r \end{cases} \quad \text{in C}$$

$$(r = 1, 2, 3)$$

$$(2) \qquad \begin{cases} X_{rs} n_s = f_r \\ N_{rs} n_s = m_r \end{cases} \quad \text{su } \sigma$$

ove n_s sono i coseni direttori della normale a σ orientata verso l'interno di C e e_{rpq} è il tensore di Ricci.

Detti η, τ, λ tre numeri interi positivi o nulli, pongo:

$$(3) \qquad b^{(r)}_{\eta,\tau,\lambda} = -\frac{1}{C} \left\{ \int_C x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda F_r \, dC + \int_\sigma x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda f_r \, d\sigma \right\}$$

$$(4) \qquad d^{(r)}_{\eta,\tau,\lambda} = -\frac{1}{C} \left\{ \int_C x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda M_r \, dC + \int_\sigma x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda m_r \, d\sigma \right\}.$$

Intendo che, d'ora in poi, il soprassegno su una funzione ne indica il valor medio in C.

Moltiplico la $(1)_1$ per $x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda \, dC$, integro in C e aggiungo la $(2)_1$ moltiplicata per $x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda \, d\sigma$ e integrata su σ. Dopo facili passaggi si ottiene:

$$(5) \qquad \overline{\eta X_{r1} x_1^{\eta-1} x_2^\tau x_3^\lambda} + \overline{\tau X_{r2} x_1^\eta x_2^{\tau-1} x_3^\lambda} + \\ + \overline{\lambda X_{r3} x_1^\eta x_2^\tau x_3^{\lambda-1}} = b^{(r)}_{\eta,\tau,\lambda} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Analogamente da $(1)_2$ e $(2)_2$ si ricava:

$$(6) \qquad \overline{\eta N_{r1} x_1^{\eta-1} x_2^\tau x_3^\lambda} + \overline{\tau N_{r2} x_1^\eta x_2^{\tau-1} x_3^\lambda} + \overline{\lambda N_{r3} x_1^\eta x_2^\tau x_3^{\lambda-1}} - \\ - \overline{e_{rpq} X_{qp} x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda} = d^{(r)}_{\eta,\tau,\lambda} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Le (5) e (6) sono certamente valide se le X_{rs}, N_{rs} e le loro derivate parziali prime sono uniformi, finite continue quasi ovunque in C e presentano, ad esempio, certi tipi di discontinuità dovute a discontinuità di prima specie delle forze assegnate o a loro singolarità concentrate o distribuite su insiemi di misura nulla.

2. APPROSSIMAZIONI POLINOMIALI

Chiamo $\{w_t\}$ la successione di tutti i possibili monomi formati con x_1, x_2, x_3 e ordinati in modo che il grado non decresca al crescere di t. Indico con m'_n: l'intero positivo tale che $m'_n + 1$ rappresenti il numero di monomi in

x_1, x_2, x_3 di grado minore o eguale a n. Per semplicità userò nel seguito notazioni ad un solo indice per le

$$X_{rs} \text{ e } N_{rs} (X_r = X_{rr} \,;\, X_{r+3} = X_{r+1,r+2} \,;\, X_{r+6} = X_{r+2,r+1} \,;\, r = 1, 2, 3).$$

Fissata ad arbitrio una reazione su σ' (ossia fissato su $\sigma' f_r$ e m_r) costruiamo le $b^{(r)}_{\eta\tau\lambda}$ e $d^{(r)}_{\eta\tau\lambda}$ corrispondenti ai monomi $w_0, \cdots, w_{m'}$ secondo (5) e (6). Sia $G^*_{m'}$, un insieme di costanti

$$\overline{X_r w_0}, \cdots, \overline{X_r w_{m'_{n-1}}} \quad , \quad \overline{N_r w_0}, \cdots, \overline{N_r w_{m'_{n-1}}}$$

soddisfacenti le (5) e (6). Chiamo $I^*_{m'}$ l'insieme descritto da $G^*_{m'}$ al variare della reazione su σ' e delle suddette costanti verificanti (5) e (6).

Sia P_t il polinomio ottenuto aggiungendo a w_t quella combinazione lineare dei monomi $w_0, \cdots, w_{t-1}$ che rende P_t ortogonale in C a $w_0, \cdots, w_{t-1}$ e sia $\{P_t\}$ la successione di tutti i polinomi ortogonali in C e linearmente indipendenti così definiti. È evidente che ognuno dei *valori medi* $\overline{X_r P_t}, \overline{N_r P_t}$ risulta combinazione lineare di alcuni degli $\overline{X_{rs} x_1^{\eta'} x_2^{\tau'} x_3^{\lambda'}}$ e di alcuni dei $\overline{N_{rs} x_1^{\eta'} x_2^{\tau'} x_3^{\lambda'}}$ rispettivamente. Definisco ora le costanti $\overline{X_r^{(m)} P_t}$ e $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ $(t = 0, \cdots, m)$. Detto $n - 1$ il grado di P_m e $m' = m'_n$, P_t si può scrivere:

$$P_t = \sum_{0=i}^{m} \gamma_{it} w_i \qquad (\gamma_{it} = \text{cost.}, \ t = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Preso in $I^*_{m'}$ un $G^*_{m'}$, ossia un insieme del tipo:

$$\overline{X_r w_0}, \cdots, \overline{X_r w_\mu}, \cdots, \overline{N_r w_0}, \cdots, \overline{N_r w_\mu} \qquad (\mu = m'_{n-1} \geq m),$$

costruisco l'insieme G_m formato da $\overline{X_r^{(m)} P_t}, \overline{N_r^{(m)} P_t}$ $(r = 1, \cdots, 9; t = 0, \cdots, m)$ con

$$\begin{aligned} \overline{X_r^{(m)} P_t} &= \sum_{0=i}^{m} \gamma_{it} \overline{X_r w_i} \\ \overline{N_r^{(m)} P_t} &= \sum_{0=i}^{m} \gamma_{it} \overline{N_r w_i} \end{aligned} \qquad (r = 1, \cdots, 9). \tag{8}$$

Nel seguito chiamerò I_m l'insieme di tutti i gruppi G_m ottenuti facendo variare $G^*_{m'}$ in $I^*_{m'}$. Ossia:

$$I_m = \{ G_m \mid G^*_{m'} \in I^*_{m'} \}.$$

Posto:

$$\rho_t^2 = \frac{1}{C} \int_C P_t^2 \, dC \tag{9}$$

dirò che le nonuple di funzioni:

$$\begin{cases} X_r^{(m)} = \sum_{0=t}^{m} \dfrac{\overline{X_r^{(m)} P_t}}{\rho_t^2} P_t \\ N_r^{(m)} = \sum_{0=t}^{m} \dfrac{\overline{N_r^{(m)} P_t}}{\rho_t^2} P_t \end{cases} \qquad (r = 1, 2, \cdots, 9). \tag{10}$$

rappresentano un'approssimazione di ordine m di una soluzione delle equazioni di equilibrio se le costanti $\overline{X_r^{(m)} P_t}$, $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ $(r = 1, \cdots, 9; t = 0, 1, \cdots, m)$ costituiscono un G_m.

È noto che la presenza delle coppie di contatto impone di tener conto della rotazione associata a ciascun punto del continuo.

Mi pongo nel caso più generale di rotazioni libere ossia indipendenti dallo spostamento dei punti.

Per brevità pongo:

$$(11) \qquad T_r = \begin{cases} X_r & \text{per } r = 1, \cdots, 9 \\ N_r & \text{per } r = 10, \cdots, 18 \end{cases} \qquad \overline{T_{rt}} = \begin{cases} \overline{X_r P_t} & \text{per } r = 1, \cdots, 9 \\ \overline{N_r P_t} & \text{per } r = 10, \cdots, 18. \end{cases}$$

Chiamo a_{rs} i coefficienti della forma quadratica nella $\overline{T_{rt}}$ che esprime l'energia potenziale elastica specifica (materiale iperelastico). Pongo:

$$(12) \qquad W_m = \frac{1}{2} \sum_{1=t}^{m} \sum_{1=r,s}^{18} \int_C a_{rs} \frac{\overline{T_{rt}}\,\overline{T_{st}}}{\rho_t^2} dC.$$

Se in (11) identifico gli $\overline{X_r P_t}$ $\overline{N_r P_t}$ con gli $\overline{X_r^{(m)} P_t}$ $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ delle (10) e pongo le $\overline{T_{rt}^{(m)}}$ così ottenute nelle (12), W_m coincide coll'energia potenziale elastica $W^{(m)}$ corrispondente all'approssimazione polinomiale rappresentata dalle (10). In analogia a quanto accade nel caso classico si può presumere che l'approssimazione che compete alla soluzione del problema elastico può essere scelta, nella classe di tutte le possibili approssimazioni polinomiali, come quella che soddisfa ad un certo teorema variazionale del tipo di quello di Menebrea (2). Nel caso di vincoli di appoggio fissi e privi di attrito o di assegnato spostamento su σ' (in particolare di incastro), la condizione suddetta, tenuto conto di quanto è dimostrato al n. 3, si può enunciare:

« La (10) rappresenta un'approssimazione polinomiale di ordine m della soluzione del problema elastico se e solo se le costanti $\overline{T_{rt}^{(m)}}$ $(r = 1, \cdots, 18)$ $(t = 0, \cdots, m)$ costituiscono il gruppo G_m minimizzante W_m in I_m ».

3. CONGRUENZA DELLE APPROSSIMAZIONI POLINOMIALI DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ELASTICO

È importante osservare (e ciò dà validità all'enunciato sopra espresso) che la diciottupla rappresentante un'approssimazione polinomiale di ordine m della soluzione del problema elastico così definita soddisfa (qualunque sia il numero m) alle condizioni di integrabilità del tipo di quelle classiche di De Saint-Venant per le quali è possibile risalire alle corrispondenti approssima-

(2) Vedi loco citato nella successiva Nota (3).

zioni delle componenti di spostamento e di rotazione, qualunque sia l'ordine di approssimazione degli sforzi.

Indico con $T_r^{*(m)}$ $(r = 1, \cdots, 18)$ l'approssimazione polinomiale d'ordine m della soluzione del problema elastico [$T_r^{*(m)}$ è dato cioè da (11) quando i secondi membri sono dati da (10) con le costanti $\overline{X_r^{(m)} P_t}$, $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ costituenti il gruppo $G_{(m)}^*$ minimizzante W_m in I_m]. Sia S_m la sollecitazione esterna corrispondente alla diciottupla $T_r^{*(m)}$ (con ciò si intendono determinate f_r e m_r su σ') e si considerino tutte le approssimazioni polinomiali del tipo (10) che danno luogo alla stessa sollecitazione esterna. Chiamo I_m' l'insieme formato da tutti i gruppi G_m di I_m che concorrono a definire le suddette approssimazioni polinomiali. Certamente la diciottupla $T_r^{*(m)}$ minimizza W_m anche nell'insieme I_m' qualunque sia m. È noto che ogni soluzione delle (1) e (2) a quadrato sommabile in C si può esprimere mediante serie del tipo:

$$T_r = \sum_{0=t}^{\infty} \frac{\overline{T_{rt}}}{\rho_t^2} P_t \qquad (r = 1, \cdots, 18). \tag{13}$$

Fra esse consideriamo solo quelle corrispondenti alla sollecitazione S_m e osserviamo che esse si possono ottenere tutte associando alla diciottupla $T_r^{*(m)}$ $(r = 1, \cdots, 18)$ una arbitraria diciottupla T_r' $(r = 1, \cdots, 1)$ soddisfacente (1) e (2) in assenza di forze e coppie di massa e superficiali. Pongo ora:

$$T_r' = T_{r(m)}' + T_{r(m)}'' \qquad (r = 1, \cdots, 18) \tag{15}$$

ove è:

$$T_{r(m)}' = \sum_{0=t}^{m} \frac{\overline{T_r' P_t}}{\rho_t^2} P_t$$
$$T_{r(m)}'' = \sum_{m+1=t}^{\infty} \frac{\overline{T_r' P_t}}{\rho_t^2} P_t . \tag{15}$$

Osservo che, per le proprietà dei polinomi P_t, i $T_{r(m)}''$ $(r = 1, \ldots, 18)$ risultano ortogonali in C ai $T_r^{*(m)}$, $T_{r(m)}'$. In corrispondenza alla sollecitazione S_m ogni soluzione delle (1), $T_{r(m)}^{**}$ $(r = 1, \cdots, 18)$, può dunque porsi nella forma:

$$T_{r(m)}^{**} = T_r^{*(m)} + T_{r(m)}' + T_{r(m)}'' \qquad (r = 1, \cdots, 18). \tag{16}$$

Detti W_m^{**} e W_m' ciò che diventa la W_m quando al posto di T_r si pone rispettivamente $T_{r(m)}^{**}$ e $T_r^{*(m)} + T_{r(m)}'$, osservo che risulta:

$$W_m^{**} \geq W_m' \geq W_m^* \tag{17}$$

ove con W_m^* si è indicata l'energia potenziale elastica corrispondente all'approssimazione polinomiale d'ordine m della soluzione del problema elastico. Nella (17) i segni di uguaglianza valgono evidentemente per $T_{r(m)}' = T_{r(m)}'' = 0$ $(r = 1, \cdots, 18)$.

La diciottupla minimizzante W_m^{**} al variare di G_m in I_m' e delle T_r' ($r = 1, \cdots, 18$) nella classe delle soluzioni delle (1) e (2) corrispondenti a forze e coppie di massa e superficiali nulle, coincide pertanto colla $T_r^{*(m)}$ ed è integrabile nel senso detto all'inizio di questo numero in quanto minimizza l'energia potenziale elastica nella classe di tutti gli stress corrispondenti ad una prefissata sollecitazione esterna (la S_m) (3).

(3) Per le rotazioni vincolate vedi: G. GRIOLI, *Linear micropolar media with constrained rotations*, Micropolar Elasticity, simposium organized by the department of mechanics of solid, june 1972, Udine.

Per le rotazioni libere vedi: Nota di G. Grioli presentata al simposio tenutosi ad Udine dal 17 al 21 giugno 1974 intitolato «Mixtures and structured continua».