ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

**Su nuovi casi di integrabilità per separazione di
variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi.
Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 57 (1974), n.6, p. 619-623.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_619_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica analitica. — *Su nuovi casi di integrabilità per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi.* Nota II (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this second paper we consider the extreme cases, that derive from the general classification, in which the dynamical equation of Hamilton-Jacobi is integrable by separation of variables. At the limit we have the solution of Levi-Civita and that of Stäckel.

Nelle due soluzioni considerate nella Nota I (**), seconda la classificazione ivi adottata, abbiamo supposto $1 < k < n - 1$. Ma esse sussistono anche per $k = 1$ e per $k = n - 1$. Considereremo allora in questa seconda Nota i casi estremi di $k = 1$ e di $k = n - 1$, continuando nella numerazione delle formule quella della Nota precedente.

5. *Caso di $k = n - 1$.*

Nel caso di $k = n - 1$ le ipersuperficie coordinate $x_n = costante$ della varietà metrica V_n sono applicabili su S_{n-1} euclideo.

Considerando la prima soluzione e ricordando le (8) e la (7), i coefficienti della forma reciproca della forza viva, e il potenziale U delle forze, risultano ora

$$\begin{aligned}
 a^{ij} &= \frac{1}{H_n(x_n)} \sum_1^{n-1} \frac{B_{is}}{B} \left\{ \frac{B_{js}}{B} K_n^{(s)}(x_n) + \sum_1^{n-1} \frac{B_{jr}}{B} \frac{X_n^{(r)}(x_n) X_n^{(s)}(x_n)}{\psi_n(x_n)} \right\}, \\
 & \hspace{15em} (i, j = 1, 2, \dots, n - 1), \\
 (31) \quad a^{nj} &= - \frac{1}{H_n \psi_n} \sum_1^{n-1} X_n^{(s)} \frac{B_{js}}{B}, \hspace{10em} (j = 1, 2, \dots, n - 1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (32) \quad a^{nn} &= \frac{1}{H_n \psi_n}, \\
 U &= U_n(x_n) / H_n(x_n),
 \end{aligned}$$

dove è

$$B = \begin{vmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \dots & X_1^{(n-1)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \dots & X_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}^{(1)} & X_{n-1}^{(2)} & \dots & X_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

In questo caso si hanno $n - 1$ integrali primi lineari nei momenti

$$(33) \quad p_i = \sum_1^{n-1} \alpha_s X_i^{(s)}(x_i), \hspace{5em} (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1974.

(**) Questi « Rendiconti » (8), LVII (1974), 391-398.

e un solo integrale quadratico

$$(34) \quad \frac{1}{2\psi_n} \left(p_n - \sum_1^{n-1} \alpha_s X_n^{(s)} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \alpha_s K_n^{(s)} - U_n - hH_n = 0.$$

Da questi si ricava

$$(35) \quad W_i(x_i) = \sum_1^{n-1} \alpha_s \int X_i^{(s)}(x_i) dx_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$(36) \quad W_n(x_n) = \sum_1^{n-1} \alpha_s \int X_n^{(s)}(x_n) dx_n + \int \sqrt{2\psi_n \left(U_n + hH_n - \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \alpha_s K_n^{(s)} \right)} dx_n,$$

e l'integrale completo dell'equazione di Jacobi risulta dalla somma $W = \sum_1^{n-1} W_i(x_i) + W_n(x_n)$, involgente le n costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, h$.

Nella seconda soluzione i coefficienti della forma reciproca dalla forza viva e il potenziale sono dati da

$$a^{ij} = \sum_1^{n-1} \frac{B_{is} B_{js}}{B^2} \varphi^{ns} + \sum_1^{n-1} \frac{B_{is}}{B} \sum_1^{n-1} \frac{B_{jr}}{B} X_n^{(r)} X_n^{(s)} \varphi^{nn}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$a^{nj} = -\varphi^{nn} \sum_1^{n-1} X_n^{(s)} \frac{B_{js}}{B}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$a^{nn} = \varphi^{nn} \quad ; \quad U = \sum_1^{n-1} b_s \varphi^{ns} + U_n(x_n) \varphi^{nn},$$

dove le φ^{ns} sono gli elementi reciproci dei termini della n^{ma} orizzontale del determinante (19), in cui tutti i termini sono costanti, fatta eccezione di quelli φ_{in} dell' n^{ma} colonna, che sono tutti funzioni di x_n soltanto.

Questa seconda soluzione non differisce pertanto dalla precedente e si riduce a quest'ultima facendo

$$\varphi^{ns} = \frac{K_n^{(s)}(x_n)}{H_n(x_n)}, \quad (s = 1, 2, \dots, n-1) \quad ; \quad \varphi^{nn} = \frac{1}{H_n(x_n) \psi_n(x_n)}.$$

6. Caso di $k = 1$.

In questo caso le ipersuperficie coordinate $x_i = \text{cost.}$ ($i = 2, 3, \dots, n$), della varietà metrica V_n , costituiscono una $(n-1)$ -pla ortogonale. Nella prima soluzione si ha

$$(37) \quad a^{11} = \frac{1}{H \cdot [X_1(x_1)]^2} \left\{ \sum_2^n K_t(x_t) + \sum_2^n \frac{[X_t(x_t)]^2}{\psi_t(x_t)} \right\}$$

$$a^{i1} = -\frac{1}{HX_1} \frac{X_i(x_i)}{\psi_i(x_i)}, \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

$$a^{ii} = \frac{1}{H\psi_i}, \quad (i = 2, 3, \dots, n); \quad a^{ij} = 0, \quad (i, j = 2, 3, \dots, n; j \neq i),$$

$$(38) \quad U = \frac{1}{H} \sum_2^n U_t(x_t), \quad \text{con } H = \sum_2^n H_t(x_t).$$

Quest'ultima esprime la costante h dell'energia per mezzo delle n costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, mentre le (53) costituiscono n integrali primi lineari nei momenti, che risolti rispetto alle costanti α_s porgono

$$(53') \quad \sum_1^n \frac{B_{is}}{B} p_i = \alpha_s, \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

L'integrale completo di Jacobi è in questo caso

$$(55) \quad W = \sum_1^n W_i(x_i) = \sum_1^n \alpha_s \sum_1^n \int X_i^{(s)}(x_i) dx_i.$$

Per $k = 0$ la prima soluzione porge

$$(56) \quad a_{ii} = 1/a^{ii} = H\psi_i(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{con } H = \sum_1^n H_r(x_r),$$

e

$$(57) \quad U = \sum_1^n U_s(x_s)/H.$$

che corrisponde al caso di integrabilità di Liouville. Infine se φ^{ni} è l'elemento reciproco del termine $\varphi_{ni}(x_i)$ nel determinante di ordine $n \parallel \varphi_{ji}(x_i) \parallel$, ($j, i = 1, 2, \dots, n$), la seconda soluzione porge

$$(58) \quad a_{ii} = 1/a^{ii} = 1/\varphi^{ni}, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad U = \sum_1^n U_s(x_s) \varphi^{ns},$$

che corrisponde al caso di integrabilità di Stäckel, in cui la forza viva ha forma quadratica ortogonale.