Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Radu Rosca, Lieven Vanhecke

Variétés spatiales de codimension deux immergées dans un espace de Minkowski muni d'une connexion principale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.6, p. 583–585.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_583_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Geometria differenziale. — *Variétés spatiales de codimension deux immergées dans un espace de Minkowski muni d'une connexion principale.* Nota di RADU ROSCA e LIEVEN VANHECKE, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. — Studio di varietà di codimensione due immerse in uno spazio di Minkowski dotato di una connessione principale.

Dans cette note on considère une variété spatiale de codimension deux immergée dans un espace de Minkowski qui est muni d'une connexion principale. On donne des considérations concernant certains champs normaux, la partie tangentielle du vecteur de position et la 1-forme de position. La considération d'une structure presque symplectique permet de formuler des propriétés de ce champ et de cette 1-forme en relation avec les duaux par rapport à la structure. Enfin, on donne une série de formules intégrales.

1. Soit $\mathcal{M}^n$ un espace de Minkowski à n dimensions et soit $T_x(\mathcal{M}^n)$ l'espace tangent en chaque point $x \in \mathcal{M}^n$. On peut écrire $T_x(\mathcal{M}^n) = H_x(\mathcal{M}^n) \oplus S_x(\mathcal{M}^n)$ où $H_x(\mathcal{M}^n) = \{\xi_a ; a = 1, n\}$ et $S_x(\mathcal{M}^n) = \{\xi_r ; r = 2, 3, \cdots, n-1\}$ sont respectivement un 2-plan hyperbolique et un $(n-2)$-plan spatial. Les vecteurs isotropes réels ξ_a et les vecteurs spatiaux ξ_r forment une base vectorielle *quasi-orthonormée* $\mathcal{R}_\xi$ [2], [6] dont la base duale $\mathcal{R}_\xi^*$ est $\{\alpha^A ; A = 1, 2, \cdots, n\}$. Une connexion ∇_p telle que $\alpha_1^r = \bar{k}_r \alpha^r$, $\alpha_r^1 = k_r \alpha^r$ (ne pas sommer) est dénommée [7] une *connexion principale* et une pareille ∇_p assure l'esistence des *sous-variétés spatiales de codimension deux.*

2. Soit alors $f : V_s^{n-2} \to \mathcal{M}_p^n$ l'immersion d'une pareille variété dans un espace de Minkowski structuré par ∇_p (noté par $\mathcal{M}_p$). Cette immersion (qui est toujours à *connexion normale triviale*) met en évidence deux champs normaux [7]: le champ $\mathbf{X}$ (*champ normal principal*) qui définit toujours une *section minimale* dans le fibré normal de V_s^{n-2} et son *associé* $\tilde{\mathbf{X}}$ qui dans le cas où f est ombilicale, est homothétique à un certain champ concourant [8] sur V_s^{n-2}.

$\psi \equiv \langle x , dx \rangle$ étant la 1-*forme de position* (x vecteur de position de V_s^{n-2}), cette forme est *harmonique* si et seulement si la composante tangentielle $\mathbf{T}$ de x définit un automorphisme infinitésimal de l'élément de volume η de V_s^{n-2}.

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1974.

Dans le cas particulier où f est *ombilicale*, elle est nécessairement *non substantielle* (dans le sens de Yano et Chen [8]) et ces qualités entraînent un ensemble de propriétés dont nous citerons ici:

(i) la connexion induite ∇_p est équi–affine;

(ii) l'application de Gauss est conforme et V_s^{n-2} est einsteinienne;

(iii) la forme ψ est une forme propre de l'opérateur harmonique $\Delta = d\delta + \delta d$.

3. Supposons maintenant $n = 2m$ et considérons sur V_s^{n-2} la *structure presque symplectique* $S_p(\Omega)$ définie par la 2-forme

$$\Omega = \alpha^2 \wedge \alpha^3 + \alpha^4 \wedge \alpha^5 + \cdots + \alpha^{n-2} \wedge \alpha^{n-1} . \tag{1}$$

J étant l'isomorphisme $UT_x(\mathscr{M}_p^n) \to UT_x^*(\mathscr{M}_p^n) : \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \lrcorner\, \Omega$, soient $\tilde{\mathbf{T}}$ et $\tilde{\psi}$ respectivement le champ et la 1-forme définis par $\tilde{\mathbf{T}} = J^{-1}(\psi)$, $\tilde{\psi} = \mathbf{T} \lrcorner\, \Omega$. $*$ désignant, conformément à l'usage, l'opérateur d'adjonction, on trouve

$$\langle \tilde{\psi} \wedge {}_*\psi \rangle = 0 \quad , \quad \langle \mathbf{T} , \tilde{\mathbf{T}} \rangle = 0 , \tag{2}$$

$$\mathscr{L}_{\tilde{\mathbf{T}}}\, \psi = 0 \qquad (\mathscr{L} \text{ dérivé de Lie}) \tag{3}$$

et si f est ombilicale, alors

$$\mathscr{L}_{\mathbf{T}}\, \psi = -2\lambda\psi . \tag{4}$$

THÉORÈME. *$\mathscr{M}_p^n$ etant un espace de Minkowski de dimension paire ($n = 2m$) et structuré par une connexion ∇_p, soit $f : V_s^{n-2} \to \mathscr{M}_p^n$ l'immersion d'une variété spatiale de codimension deux. Soient ψ, $\mathbf{T}$ et Ω la 1-forme de position, la composante tangentielle du vecteur de position et la 2-forme presque symplectique* (1); *$\tilde{\psi}$ et $\tilde{\mathbf{T}}$ la 1-forme et le champ vectoriel qui correspondent par dualité symplectique respectivement à $\mathbf{T}$ et ψ. Alors*:

(i) *$\mathbf{T}$ et $\tilde{\mathbf{T}}$ de même que ψ et $\tilde{\psi}$ sont orthogonaux*;

(ii) *$\tilde{\mathbf{T}}$ est un automorphisme infinitésimal de ψ et si l'immersion est ombilicale $\mathbf{T}$ est une transformation infinitésimale conforme de ψ*;

(iii) *ψ et $\tilde{\psi}$ satisfont aux relations*

$$L^{m-2}\,\psi = {}_*\tilde{\psi} \quad , \quad L^{m-2}\,\tilde{\psi} = -{}_*\psi \tag{5}$$

$$\left(L^{m-2} : \Lambda^1(V_s^{n-2}) \to \Lambda^{n-3}(V_s^{n-2}) : \varphi \mapsto L^{m-2}\,\varphi = \varphi \wedge \frac{\Omega^{m-2}}{(m-2)!}\ [5]\right);$$

(iv) *dans le cas $n = 4$, ψ est Ω-harmonique* ($d \wedge {}_{\tilde{*}}\psi = 0$, $\tilde{*}$ *adjointe symplectique* [5]).

4. Supposons maintenant que V_s^{n-2} (qui est de métrique définie négative) est compacte, orientée et sans bord. A l'aide de la formule générale de Stokes on établit les *formules intégrales* suivantes (du même type que celles données

dans [1], [2], [4]):

$$\int \{n - 2 - \langle \boldsymbol{x}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle\} \eta = 0\,, \tag{6}$$

$$\int \{n - 2 - 2 \operatorname{tr} \varphi(\boldsymbol{e}) \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e} \rangle\} \eta + \int \left\{ \rho^2 x^n \bar{k} + \frac{1}{\rho^2} x^1 k \right\} \eta = 0\,, \tag{7}$$

$$\int \langle \nabla f, \boldsymbol{x} \rangle \eta + \int f(n - 2 - \langle \boldsymbol{x}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle) \eta = 0\,. \tag{8}$$

Dans (7) $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\rho \xi_1 + \frac{1}{\rho} \xi_n \right)$ est un champ normal unitaire quelconque, $\varphi(\boldsymbol{e})$ la seconde forme fondamentale $-\langle d\boldsymbol{x}, \nabla \boldsymbol{e} \rangle$, $k = \Sigma k_r$, $\bar{k} = \Sigma \bar{k}_r$ et $\boldsymbol{x} = \mathbf{T} + x^1 \xi_1 + x^n \xi_n$. Dans (8) ∇f est le gradient d'une fonction différentiable f sur V_s^{n-2}.

De plus, on a

$$\int \tilde{\mathbf{X}} \eta = 0\,, \tag{8}$$

$$\int (\operatorname{div}_\eta \mathbf{Y}) \eta = 0\,, \quad \mathbf{Y} \text{ champ tangent quelconque}, \tag{10}$$

$$\int \langle \boldsymbol{a}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle \eta = 0\,, \quad \boldsymbol{a} \text{ vecteur constant}, \tag{11}$$

et

$$\Delta \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle\,. \tag{12}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMUR Kr. (1969) – *Vector forms and integral formulas for hypersurfaces in Euclidean space*, « J. Diff. Geom. », *3*.

[2] CAGNAC F. (1965) – *Géométrie des hypersurfaces isotropes*, « C. R. Acad. Sc. Paris », sér. A, *261*.

[3] CHEN B. Y. et YANO K. (1971) – *Integral Formulas for Submanifolds and Their Applitions*, « J. Diff. Geom », *5*.

[4] GARDNER R. B. (1969) – *An integral formula for immersions in Euclidean space*, « J. Diff. Geom. », *3*.

[5] LIBERMANN P. (1954) – *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, « Ann. di Matem. », *36*.

[6] ROSCA R. et VANHECKE L. – *Sous-variétés remarquables d'un espace pseudo-riemannien ou pseudo-euclidien*, monographie à paraître.

[7] ROSCA R. et VANHECKE L. – *Sur les variétés lorentziennes munies d'une connexion principale*, à paraître.

[8] YANO K. et CHEN B. Y. (1971) – *On the concurrent vector fields of immersed manifolds*, « Kōdai Math. Sem. Rep. », *23*.