Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vasile Cruceanu

Objets géométriques h-invariants sur le fibré tangent

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.6, p. 548–558.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_548_0>

Geometria differenziale. — *Objets géométriques h–invariants sur le fibré tangent.* Nota di VASILE CRUCEANU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Viene determinata la struttura degli oggetti geometrici sul fibrato tangente di una varietà differenziabile che sono invarianti di fronte al gruppo delle ometetie di tale fibrato. Viene stabilita la relazione fra questi oggetti e i « lifts » completi ed orizzontali degli oggetti definiti sulla varietà base, ottenendo altresì nuovi oggetti geometrici sulla base.

1. INTRODUCTION

Soit M une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞ et $\pi : TM \to M$ son fibré tangent. En posant pour chaque $t \in R$ (le champ de réels), $x \in M$ et $y \in T_x M$

$$h_t(x, y) = (x, \exp ty) \tag{1}$$

on obtient une action de classe C^∞, $h : R \times TM \to TM$, du groupe additif R sur TM, nommée *le groupe des homothéties* de TM. Ce groupe engendre un champ de vecteurs V sur TM nommé *le champ canonique* qui, dans un système de coordonnées locales naturelles (x^i, y^i), $(i, j, k = 1, 2, \cdots, n)$ sur TM, induit par le système (x^i) su M, est donné par

$$V = y^i \frac{\partial}{\partial y^i} . \tag{2}$$

Un objet géométrique Ω sur TM sera nommé *h–invariant* s'il est conservé par les homotéties de TM.

Pour un objet géométrique Ω qui est dérivable Lie, la condition de h–invariance peut s'éxprimer par l'annulation de la dérivée de Lie par rapport au champ canonique,

$$\mathscr{L}_V \Omega = 0. \tag{3}$$

De l'expression locale pour la dérivée de Lie il résulte, pour les objets que nous allons considérer, que Ω est h–invariant si et seulement si ses composantes sont homogènes de certains degrés dans les coordonnées de V, c'est–à–dire en y^i. En utilisant un résultat d'analyse, selon lequel une application $f : R^n \to R$ de classe C^1 et homogène de premier degré est linéaire, on obtient qu'une partie des composantes de Ω sont nulles, des autres ne dépendent pas de y^i et enfin, il peut exister des composantes qui sont des polynômes homogènes de certains degrés en y^i. De la loi de transformation pour les composantes

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1974.

de Ω au changement des coordonnéees sur TM il résulte que les composantes qui ne dépendent pas de y^i determinent sur M un objet géométrique du même type que Ω et les coefficients des polynômes qui donnent les autres composants de Ω déterminent, avec les composantes précédentes et leurs dérivées de premier degré par rapport à x^i, un objet géométrique sur M avec une loi de transformation plus compliquée. Il en résulte une manière naturelle pour obtenir des nouveaux objets géométriques sur M.

Nous nous limiterons dans cette Note à l'étude des champs de vecteurs, de tenseurs de type (1,1) et des connexions h-invariants, de classe C^∞, qui présentent un intérêt spécial.

2. CHAMPS DE VECTEURS h-INVARIANTS

En considérant sur TM un champ de vecteurs A avec l'expression locale

$$A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + A^{n+1} \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{4}$$

on obtient, pour sa dérivée de Lie par rapport à V,

$$(\mathcal{L}_V A)^i = y^j \frac{\partial A^i}{\partial y^j} \quad , \quad (\mathcal{L}_V A)^{n+1} = y^j \frac{\partial A^{n+i}}{\partial y^j} - A^{n+i}. \tag{5}$$

Par suite, il en résulte:

PROPOSITION 2.1. *Un champ de vecteurs* A *sur* TM *est h-invariant si et seulement si, dans l'expression locale* (4), A^i *dependent seulement de* x^k *et* A^{n+i} *sont linéaires en* y^j, *c'est-à-dire*

$$A^i = A^i(x^k) \quad , \quad A^{n+i} = A^i_j(x^k)\, y^j. \tag{6}$$

De la loi de transformation de A, au changement des coordonnées naturelles sur TM, on obtient

$$A^{i'} = A^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad , \quad A^{i'}_{j'} = A^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + A^i \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \tag{7}$$

Par suite, A^i se transforment comme les composantes d'un vecteur sur M et A^i_j comme les dérivées par rapport à x^i des composantes d'un vecteur sur M. En posant alors

$$X^i = A^i \quad , \quad S^i_j = A^i_j - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \tag{8}$$

il résulte que X^i sont les composantes d'un champ de vecteurs X et S^i_j les composantes d'un champ de tenseurs S de type (1,1) sur M. On peut ecrire alors

$$A = \lambda X + \sigma S \tag{9}$$

où λX est le " lift " complet de X, donné localement par, [9],

$$\lambda X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{10}$$

et σS est le champ de vecteurs sur TM avec l'expression locale, [9]

$$S = S^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^i} . \tag{11}$$

Nous avons par suite:

PROPOSITION 2.2. *Un champ de vecteurs* A *sur* TM *est h-invariant si et seulement s'il existe sur* M *un champ de vecteurs* X *et un champ de tenseurs* S *de type* (1,1) *tel que* A *soit donné par* (9), *où les applications* λ *et* σ *sont définies respectivement par* (10) *et* (11).

Pour le crochet des deux champs de vecteurs *h*–invariant, qui est aussi un champ *h*–invariant, on obtient

PROPOSITION 2.3. *Si* $A = \lambda X + \sigma S$ *et* $B = \lambda Y + \sigma T$ *sont deux champs de vecteurs h–invariants sur* TM *alors leur crochet* [A , B] *est le champ h–invariant donné par*

$$[A , B] = \lambda [X , Y] + \sigma (\mathscr{L}_X T - \mathscr{L}_Y S - [S , T]) \tag{12}$$

où

$$[S , T] = S \circ T - T \circ S .$$

Soient $\mathscr{D}^1(M)$ et $\mathscr{D}^1(TM)$ les algèbres de Lie des champs de vecteurs sur M et TM et $\mathscr{D}^1_1(M)$ l'algèbre de Lie des champs de tenseurs de type (1,1) sur M. En considéerant l'application $\alpha : \mathscr{D}^1(M) \times \mathscr{D}^1_1(M) \rightarrow \mathscr{D}^1(TM)$, donnée par

$$\alpha (X , S) = \lambda X + \sigma S \qquad \forall X \in \mathscr{D}^1(M) \quad , \quad S \in \mathscr{D}^1_1(M), \tag{13}$$

on peut constater que α est une application R–linéaire injective qui a comme image l'algèbre de Lie $\mathscr{H}^1(TM)$, formée par les champs de vecteurs *h*–invariants sur TM.

Compte tenu de 12) il résulte alors qu'en posant

$$\{(X , S) , (Y , T)\} = ([X , Y] , \mathscr{L}_X T - \mathscr{L}_Y S - [S , T]) \tag{14}$$

on obtient une structure d'algebre de Lie sur $\mathscr{D}^1(M) \times \mathscr{D}^1_1(M)$.

Nous avons obtenu, par suite, la résultat principal suivant:

THÉORÈME 2.1. *L'application* 13) *est un isomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathscr{D}^1(M) \times \mathscr{D}^1_1(M)$, *avec le crochet défini par* (14), *sur l'algèbre de Lie* $\mathscr{H}^1(TM)$ *des champs de vecteurs h–invariants sur* TM.

Remarque 2.1. En prenant en 13) S=0, on obtient que l'application $\lambda : \mathscr{D}^1(M) \rightarrow \mathscr{D}^1(TM)$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathscr{D}^1(M)$ sur l'algèbre $\lambda(\mathscr{D}^1(M)) \subset \mathscr{H}^1(TM)$.

Remarque 2.2. Pour $X = 0$ en 13), il résulte que l'application $\sigma : \mathcal{D}_1^1(M) \to \mathcal{D}^1(TM)$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_1^1(M)$, avec le crochet défini par $\{S, T\} = -[S, T]$, sur l'algèbre $\sigma(\mathcal{D}_1^1(M)) \subset \mathcal{H}^1(TM)$, formée par les champs des vecteurs h-invariants, verticaux sur TM. Dans cet isomorphisme au champ de tenseurs I de Kronecker sur M correspond le champ de vecteurs canonique V sur TM.

Remarque 2.3. En posant en 13), $S = -{}^t\nabla X$, où ${}^t\nabla$ est la connexion linéaire transposée à une connexion ∇, définie per ${}^t\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, on obtient le lift horizontal [9] de X par rapport à ∇.

$$h_\nabla X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{jk}^i X^j y^k \frac{\partial}{\partial y^i} .$$

Un champ de vecteurs A sur TM est nommé *projetable* s'il existe sur M un champ X tel que $\pi^* A = X$.

En coordonnées locales naturelles, un champ projetable est caractérisé par le fait que les camposantes A^i dépendent seulement de x^k. L'ensemble des champs de vecteurs sur TM projetables est un $\pi_*(C^\infty(M))$-module qui sera noté par $\mathcal{P}^1(TM)$. Compte-tenu de (6) on obtient:

PROPOSITION 2.4. *Le* $\pi_*(C^\infty(M))$-*module* $\mathcal{H}^1(TM)$ *des champs de vecteurs h-invariants sur* TM *est un sous-module de* $\pi_*(C^\infty(M))$-*module* $\mathcal{P}^1(TM)$, *formé per les champs de vecteurs sur* TM *projetables.*

3. CHAMPS DE TENSEURS DE TYPE (1,1), h-INVARIANTS

Soit F un champ de tenseurs de type (1,1) sur TM, avec l'expression locale

$$(15) \qquad F\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = F_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} + F_j^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \quad , \quad F\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = F_{n+j}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + F_{n+j}^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} ,$$

qui peut s'ecrire encore

$$(16) \qquad F = \begin{bmatrix} F_j^i & F_{n+j}^i \\ F_j^{n+i} & F_{n+j}^{n+i} \end{bmatrix} .$$

Pour la dérivée de Lie $\mathcal{L}_V F$ on obtient l'expression locale

$$(17) \qquad \mathcal{L}_V F = \begin{bmatrix} y^k \dfrac{\partial F_j^i}{\partial y^k} & y^k \dfrac{\partial F_{n+j}^i}{\partial y^k} + F_{n+j}^i \\ y^k \dfrac{\partial F_j^{n+i}}{\partial y^k} - F_j^{n+i} & y^k \dfrac{\partial F_{n+j}^{n+i}}{\partial y^k} \end{bmatrix} ,$$

qui nous conduit au résultat suivant:

PROPOSITION 3.1. *Un champ de tenseurs* F *de type* (1,1) *sur* TM *est h-invariant si et seulement si* F_j^i *et* F_{n+j}^{n+i} *dépendent seulement de* x^l, F_{n+j}^i *sont nulles et* F_j^{n+i} *sont linéaires en* y^k.

$$(18) \qquad F_j^i = F_j^i(x^l) \quad , \quad F_{n+j}^i = 0 \quad , \quad F_j^{n+i} = F_{jk}^i(x^l)\, y^k \quad , \quad F_{n+j}^{n+i} = F_{n+j}^{n+i}(x^l).$$

De la loi de transformation des composantes de F au changement des coordonnées naturelles, on obtient que

$$e^i_j = F^i_j \quad , \quad f^i_j = F^{n+i}_{n+j} \tag{19}$$

déterminent deux champs de tenseurs e et f sur M. La loi de transformation de F^i_{jk} nous suggere l'idée de considérer le lift complet de f, c'est-à-dire, le champ de tenseurs λf, donné localement par

$$\lambda f = \begin{bmatrix} f^i_j & 0 \\ \dfrac{\partial f^i_j}{\partial x^k} y^k & f^i_j \end{bmatrix}. \tag{20}$$

On peut ecrire alors

$$F = \lambda f + H, \tag{21}$$

où H est un champ de tenseurs h–invariant, vertical sur TM. De l'expression locale

$$H = \begin{bmatrix} H^i_j & 0 \\ H^i_j(x^l)\, y^k & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

il résulte que H^i_j détermine le champ de tenseurs e–f sur M et que H^i_{jk} se transforment, au changement des coordonnées sur M, selon la loi

$$H^{i'}_{j'k'} = H^i_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + H^i_j \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \tag{23}$$

Par suite, en posant

$$\varphi^i_j = -H^i_j \quad , \quad \Phi^i_{jk} = H^i_{jk} \tag{24}$$

le couple $\widetilde{\Phi} = (\varphi^i_j , \Phi^i_{jk})$ détermine une quasi–connexion (cfr. [8], [2]) sur M.

Le tenseur F peut s'ecrire alors sous la forme

$$F = \lambda f + \mu\widetilde{\Phi} \tag{25}$$

où λf est le lift complete de f et $\mu\widetilde{\Phi}$ est le champ de tenseurs h–invariant vertical sur TM, défini par la quasi–connexion $\widetilde{\Phi}$, à l'aide de l'expression locale

$$\mu\widetilde{\Phi} = \begin{bmatrix} -\varphi^i_j & 0 \\ \Phi^i_{jk}\, y^k & 0 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

On en obtient le résultat suivant:

PROPOSITION 3.2. *Un champ de tenseurs* F *de type* (1, 1) *sur* TM *est h–invariant si et seulement s'il existe un champ de tenseurs f de même type et une quasi–connexion* $\widetilde{\Phi} = (\varphi^i_j , \Phi^i_{jk})$ *sur* M, *tel que* F *soit donné par* (25) *où* λ *et* μ *sont les applications définies respectivement par* (20) *et* (26).

Une quasi–connexion $\tilde{\Phi} = (\varphi^i_j , \Phi^i_{jk})$ peut être regardée, [2], comme un couple formé par un champ de tenseurs $\varphi = (\varphi^i_j)$ et une application $\Phi = (\Phi^i_{jk})$, C^∞ (M)–linéaire, de $\mathscr{D}^1$ (M) dans le C^∞ (M)–module des R–endomorphismes de $\mathscr{D}^1$ (M), tel que

$$(27)\qquad \Phi_X hY = h\Phi_X Y + \varphi(X)\, h\cdot Y \quad , \quad \forall h \in C^\infty(M)\,;\ X , Y \in \mathscr{D}^1(M)\,.$$

Si $\tilde{\Phi} = (\varphi , \Phi)$ est une quasi–connexion et f un champ de tenseurs de type (1,1) sur M, alors en posant

$$(28)\qquad (\Phi \circ f)_X Y = \Phi_{f(X)} Y \quad , \quad (f \circ \Phi)_X Y = f(\Phi_X Y) - (\mathscr{L}_Y f)(\varphi(X))$$

on peut voir que les couples

$$(29)\qquad \tilde{\Phi} \circ f = (\varphi \circ f, \Phi \circ f) \quad , \quad f \circ \tilde{\Phi} = (f \circ \varphi , f \circ \Phi)$$

sont aussi des quasi–connexions sur M.

Il en résulte que si f est un champ de tenseurs de type (1,1) et $\tilde{\Phi} = (\varphi , \Phi)$, $\tilde{\Psi} = (\psi , \Psi)$ deux quasi–connexions sur M, alors les crochets

$$(30)\qquad [f, \tilde{\Phi}] = f \circ \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \circ f \quad , \quad [\tilde{\Phi} , \tilde{\Psi}] = \tilde{\Phi} \circ \varphi - \tilde{\Psi} \circ \varphi$$

sont aussi des quasi–connexions sur M.

En utilisant ces résultats on obtient:

PROPOSITION 3.3. *Si* $F = \lambda f + \mu\tilde{\Phi}$ *et* $G = \lambda g + \mu\tilde{\Psi}$ *sont deux champs de tenseurs de type* (1, 1) *sur* TM, *h–invariants, alors leur crochet* $[F , G] = F \circ G - G \circ F$ *est le champ de tenseurs h–invariant, donné par*

$$(31)\qquad [F , G] = \lambda\,[f, g] + \mu\,([f, \tilde{\Psi}] - [g , \tilde{\Phi}] - [\tilde{\Phi} , \tilde{\Psi}]).$$

Si $\mathscr{L}$(M) est le C^∞ (M)–module des quasi–connexions sur M, alors l'application $\beta : \mathscr{D}^1_1(M) \times \mathscr{L}(M) \to \mathscr{D}^1_1(TM)$, définie par

$$(32)\qquad \beta(f, \tilde{\Phi}) = \lambda f + \mu\tilde{\Phi} \qquad \forall f \in \mathscr{D}^1_1(M) \quad , \quad \tilde{\Phi} \in \mathscr{L}(M)$$

est une application R–linéaire injective, qui a comme image l'algèbre de Lie $\mathscr{H}^1_1$(TM) des champs de tenseurs de type (1,1), h–invariants sur TM. De (31) il resulte alors qu'en posant

$$(33)\qquad \{(f, \tilde{\Phi}) , (g , \tilde{\Psi})\} = ([f, g] , [f, \tilde{\Psi}] - [g , \tilde{\Phi}] - [\tilde{\Phi} , \tilde{\Psi}])$$

on obtient une structure d'algèbre de Lie sur $\mathscr{D}^1_1(M) \times \mathscr{L}(M)$.

Par conséquence on a le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *L'application* (32) *est un isomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathscr{D}^1_1(M) \times \mathscr{L}(M)$, *avec le crochet defini par* (33), *sur l'algèbre de Lie* $\mathscr{H}^1_1$(TM), *formée par le schamps de tenseurs de type* (1 , 1), *h–invariants sur* TM.

Remarque 3.1. En prenant en (32) $f = \mathrm{I}$, et $\tilde{\tilde{\Phi}} = (2\mathrm{I}, 2\nabla)$, où I est le tenseur de Kronecker et ∇ une connexion linéaire sur M, on obtient la structure presque–produit F sur TM, associée canoniquement à ∇, [5],

$$\mathrm{F} = \begin{bmatrix} -\delta^i_j & 0 \\ 2\,\Gamma^i_{jk}\,y^k & \delta^i_j \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Une telle structure peut être caractérisée, [4], par

$$\mathscr{L}_{\mathrm{V}}\,\mathrm{F} = 0 \quad , \quad \mathrm{F} \circ \mathrm{J} = \mathrm{J} \quad , \quad \mathrm{J} \circ \mathrm{F} = -\mathrm{J}, \tag{35}$$

où J est la structure présque–tangente naturelle sur TM, c'est–à–dire le champ de tenseurs de type (1,1), donné dans une carte naturelle par

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta^i_j & 0 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Remarque 3.2. En mettant en (32), $\tilde{\tilde{\Phi}} = (0, -{}^t\nabla f)$ on obtient le lift horizontal de f, [9], par rapport à la connexion ∇,

$$h_\nabla f = \begin{bmatrix} f^i_j & 0 \\ (-\Gamma^i_{kl}\,f^k_j + \Gamma^k_{jl}\,f^i_k)\,y^l & f^i_j \end{bmatrix}.$$

Remarque 3.3. Pour $\tilde{\tilde{\Phi}} = 0$ en 32), il résulte que l'application $\lambda : \mathscr{D}^1_1(\mathrm{M}) \to \mathscr{D}^1_1(\mathrm{TM})$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathscr{D}^1_1(\mathrm{M})$ sur l'algèbre de Lie $\lambda(\mathscr{D}^1_1(\mathrm{M})) \subset \mathscr{H}^1_1(\mathrm{TM})$.

Remarque 3.4. En posant en 32) $f = 0$, on déduit que l'application $\mu : \mathscr{L}(\mathrm{M}) \to \mathscr{D}^1_1(\mathrm{TM})$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(\mathrm{M})$, avec le crochet dèfini par $\{\tilde{\tilde{\Phi}}, \tilde{\tilde{\Psi}}\} = -[\tilde{\tilde{\Phi}}, \tilde{\tilde{\Psi}}]$, sur l'algèbre de Lie $\mu(\mathscr{L}(\mathrm{M})) \subset \mathscr{H}^1_1(\mathrm{TM})$, formée par les champs de tenseurs de type (1,1) verticaux, h–invariants sur TM.

Ces tenseurs sont caractérisées par

$$\mathscr{L}_{\mathrm{V}}\,\mathrm{H} = 0 \quad , \quad \mathrm{H} \circ \mathrm{J} = 0. \tag{37}$$

En particulier, pour $f = 0$ et $\tilde{\tilde{\Phi}} = (\mathrm{I}, \nabla)$, on obtient

$$\mathrm{H} = \mu\tilde{\tilde{\Phi}} = \begin{bmatrix} -\delta^i_j & 0 \\ \Gamma^i_{jk}\,y^k & 0 \end{bmatrix}, \tag{38}$$

c'est–à–dire dans l'application μ, à la variété $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$–linéaire $\mathscr{L}_0(\mathrm{M}) \subset \mathscr{L}(\mathrm{M})$, formée par les connexions linéaires sur M, corresponde la variété $\pi_*(\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}))$–linéaire de $\mu(\mathscr{L}(\mathrm{M}))$, formée par les champs de tenseurs de type (1, 1) sur TM qui satisfont les conditions

$$\mathscr{L}_{\mathrm{V}}\,\mathrm{H} = 0 \quad , \quad \mathrm{H} \circ \mathrm{J} = 0 \quad , \quad \mathrm{J} \circ \mathrm{H} = -\mathrm{J}. \tag{39}$$

Ces tenseurs satisfont encore la rélation

$$\mathrm{H}^2 + \mathrm{H} = 0. \tag{40}$$

Le tenseur $-\mathrm{H}$ est alors le projecteur horizontal de ∇.

Un champ de tenseurs F de type (1, 1) sur TM s'appelle *projetable* s'il conserve le $\pi_*(C^\infty(M))$-module $\mathscr{P}^1(TM)$, formé par les champs de vecteurs projetables, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathscr{P}^1(TM) \Rightarrow F(A) \in \mathscr{P}^1(TM). \tag{41}$$

On voit aisément qu'un champ de tenseurs F projetable est caractérisé par le fait que dans une carte naturelle ses composantes satisfont les conditions:

$$F^i = F^i(x^l) \quad , \quad F^i_{n+j} = 0. \tag{42}$$

Compte-tenu de (18) il en résulte:

PROPOSITION 3.4. *Le* $\pi_*(C^\infty(M))$*-module* $\mathscr{H}^1_1(TM)$, *des champs de tenseurs de type* (1, 1) *h-invariants sur* TM, *est un sous module du* $\pi_*(C^\infty(M))$*-module* $\mathscr{P}^1_1(TM)$, *formé par les champs de tenseurs de même type sur* TM, *projetables.*

Remarque 3.5. Un champ de tenseurs F de type (1, 1) sur TM, projetable, peut être aussi caractérisé par le fait qu'il existe un champ de tenseurs f de même type sur M, tel que

$$\pi^*(F(A)) = f(\pi^*(A)) \qquad \forall A \in \mathscr{P}^1(TM). \tag{43}$$

Le tenseur f s'appelle la *projection* de F.

On peut constater aussi qu'un champ de tenseurs F de type (1,1) est h-invariant si et seulement s'il conserve le $\pi_*(C^\infty(M))$-module $\mathscr{H}^1(TM)$, des champs de vecteurs h-invariants sur TM, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathscr{H}^1(TM) \Rightarrow F(A) \in \mathscr{H}^1(TM). \tag{44}$$

4. CONNEXIONS LINÉAIRES h-INVARIANTES

Soit $\widetilde{\nabla}$ une connexion linéaire sur TM, représentée dans une carte locale naturelle par,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \widetilde{\Gamma}^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} + \widetilde{\Gamma}^{n+i}_{jk} \frac{\partial}{\partial y^i}, \\
\widetilde{\nabla}_{\partial/\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \widetilde{\Gamma}^i_{n+j\,k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \widetilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,k} \frac{\partial}{\partial y^i}, \\
\widetilde{\nabla}_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^k} &= \widetilde{\Gamma}^i_{j\,n+k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \widetilde{\Gamma}^{n+i}_{j\,n+k} \frac{\partial}{\partial y^i}, \\
\widetilde{\nabla}_{\partial/\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^k} &= \widetilde{\Gamma}^i_{n+j\,n+k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \widetilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,n+k} \frac{\partial}{\partial y^i}.
\end{aligned} \tag{45}$$

De l'expresion locale pour la dérivée de Lie de $\widetilde{\nabla}$ on obtient le résultat:

PROPOSITION 4.1. *Un connexion linéaire* $\widetilde{\nabla}$ *sur* TM *est h-invariante si et seulement si ses composantes, dans une carte locale, satisfont les conditions:* $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$, $\widetilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,k}$, $\widetilde{\Gamma}^{n+i}_{j\,n+k}$ *dépendant seulement de* x^m; $\widetilde{\Gamma}^i_{n+j\,k}$, $\widetilde{\Gamma}^i_{j\,n+k}$, $\widetilde{\Gamma}^i_{n+j\,n+k}$, $\widetilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,n+k}$ *sont nulles et* $\widetilde{\Gamma}^{n+i}_{jk}$ *sont linéaires en* y^l.

De la loi de transformation des composantes de $\widetilde{\nabla}$ au changement des coordonnées on obtient que les fonctions

$$\Gamma^{i}_{jk} = \widetilde{\Gamma}^{i}_{jk} \quad , \quad \Gamma'^{i}_{jk} = \widetilde{\Gamma}^{n+i}_{j\,n+k} \quad , \quad \Gamma''^{i}_{jk} = \Gamma^{n+i}_{n+j\,k} \tag{46}$$

sont les composantes de trois connexions, respectivement ∇, ∇' et ∇'' sur M. Par suite, en posant

$$S^{i}_{jk} = \widetilde{\Gamma}^{n+i}_{j\,n+k} - \widetilde{\Gamma}^{i}_{jk} \quad , \quad T^{i}_{jk} = \widetilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,k} - \widetilde{\Gamma}^{i}_{jk} \tag{47}$$

on obtient deux champ de tenseurs S et T de type (1 , 2) sur M.

En considérant le lift complet $\lambda\nabla$ de la connexion ∇ donné localement par

$$\begin{gathered} \overline{\Gamma}^{i}_{jk} = \overline{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,k} = \overline{\Gamma}^{n+i}_{j\,n+k} = \Gamma^{i}_{jk}\,, \\ \overline{\Gamma}^{i}_{n+j\,k} = \overline{\Gamma}^{i}_{j\,n+k} = \overline{\Gamma}^{i}_{n+j\,n+k} = \overline{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,n+k} = 0 \quad , \quad \overline{\Gamma}^{n+i}_{jk} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{jk}}{\partial x^{l}}\, y^{l}, \end{gathered} \tag{48}$$

on peut ecrire

$$\widetilde{\nabla} = \lambda\nabla + \widetilde{B} \tag{49}$$

où $\widetilde{B}$ est un champ de tenseurs de type (1,2) sur TM, *h*–invariant, qui satisfait aussi la condition $J \circ \widetilde{B} = 0$. Les composantes de $\widetilde{B}$ sont:

$$\begin{gathered} \widetilde{B}^{i}_{jk} = \widetilde{B}^{i}_{n+j\,k} = \widetilde{B}^{i}_{j\,n+k} = \widetilde{B}^{i}_{n+j\,n+k} = \widetilde{B}^{n+i}_{n+j\,n+k} = 0\,, \\ \widetilde{B}^{n+i}_{j\,n+k} = S^{i}_{jk} \quad , \quad \widetilde{B}^{n+i}_{n+jk} = T^{i}_{jk} \quad , \quad \widetilde{B}^{n+i}_{jk} = B^{i}_{jkl}\,(x^{m})\, y^{l}. \end{gathered} \tag{50}$$

Au changement des coordonnées, B^{i}_{jkl} se transforme selon la loi

$$\begin{aligned} B^{i'}_{j'k'l'} = B^{i}_{jkl} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{l}}{\partial x^{l'}} + S^{i}_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^{2} x^{k}}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}} + \\ + T^{i}_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial^{2} x^{j}}{\partial x^{j'} \partial x^{l'}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\,. \end{aligned} \tag{51}$$

On en déduit que les fonctions

$$R^{i}_{jkl} = B^{i}_{jkl} - S^{i}_{jm}\,\Gamma^{m}_{kl} - T^{i}_{mk}\,\Gamma^{m}_{jl}\,. \tag{52}$$

déterminent un champ de tenseurs de type (1 , 3) sur M. Par suite, B^{i}_{jkl} a l'expression

$$B^{i}_{jkl} = R^{i}_{jkl} + S^{i}_{jm}\,\Gamma^{m}_{kl} + T^{i}_{mk}\,\Gamma^{m}_{jl}\,. \tag{53}$$

On peut donc énoncer le résultat:

PROPOSITION 4.2. *La connexion linéaire* $\widetilde{\nabla}$ *sur* TM *est h–invariante si et seulement s'il existe une connexion linéaire* ∇, *deux champs de tenseurs* S *et* T *de type* (1 , 2) *et un champ de tenseurs* R *de type* (1 , 3) *sur* M, *tel que* $\widetilde{\nabla}$ *soit donnée par* 49), *où* $\lambda\nabla$ *est déterminée par* 48) *et* $\widetilde{B}$ *par* (50) *et* (53).

Remarque 4.1. Le triplet $(S^i_{jk}, T^i_{jk}, B^i_{jkl})$ est un objet géométrique sur M formé par les champs de tenseurs S et T de type (1, 2) et l'application $B : \mathscr{D}^1(M) \times \mathscr{D}^1(M) \times \times \mathscr{D}(M) \to \mathscr{D}^1(M)$, qui est $C^\infty(M)$–linéaire dans les premiers deux arguments, R–linéaire dans le dernier et qui satisfait aussi la condition

$$(54)\qquad B(X, Y) hZ = hB(X, Y) Z + S(X, Y(h)\cdot Z) + T(X(h)\cdot Z, Y),$$
$$\forall h \in C^\infty(M), \; X, Y, Z \in \mathscr{D}^1(M).$$

L'application B a l'expression globale suivante

$$(55)\qquad B(X, Y) Z = R(X, Y) Z + S(X, \nabla_Y Z) + T(\nabla_X Z, Y), \qquad \forall X, Y, Z \in \mathscr{D}^1(M).$$

On peut voir que l'ensemble $\mathscr{L}_0(M) \times \mathscr{D}^1_2(M) \times \mathscr{D}^1_2(M) \times \mathscr{D}^1_3(M)$ formé par les quadruples (∇, S, T, R) est un module affine, [1], associé au module linéaire $(\mathscr{D}^1_2(M))^3 \times \mathscr{D}^1_3(M)$ sur l'anneau $C^\infty(M)$. L'ensemble $\mathscr{L}_h(TM)$, formé par les connexion h–invariantes sur TM, est aussi un module affine, associé au module linéaire $\mathscr{H}^1_2(TM)$, des champ de tenseurs de type (1, 2) sur TM h–invariants, sur l'anneau $\pi_*(C^\infty(M))$.

Par un calcul simple on obtient:

THÉORÈME 4.1. *L'application* $\rho : \mathscr{L}_0(M) \times \mathscr{D}^1_2(M) \times \mathscr{D}^1_2(M) \times \mathscr{D}^1_3(M) \to \to \mathscr{L}_h(TM)$, *définie par* (49), *où* $\lambda\nabla$ *est donné par* (48) *et* $\tilde{B}$ *par* (50) *et* (53), *est un isomorphisme d'espaces affins sur* R.

Remarque 4.2. En prenant $S = T = R = 0$, en (50) et (53), c'est-à-dire $\tilde{B} = 0$ en (49), on deduit que l'application $\lambda : \mathscr{L}_0(M) \to \mathscr{L}_0(TM)$ est un isomorphisme R–affine de $\mathscr{L}_0(M)$ sur $\lambda(\mathscr{L}_0(M)) \subset \mathscr{L}_h(TM)$.

Remarque 4.3. En considerant sur M une connexion fixée $D = (G^i_{jk})$ et en prennant en (50)

$$(56)\qquad S^i_{jk} = 0 \quad , \quad T^i_{jk} = G^i_{jk} - \Gamma^i_{jk},$$
$$B^i_{jkl} = - R^i_{ljk} + \nabla_j T^i_{lk} + T^i_{mk}\Gamma^m_{jl}$$

où R^i_{ljk} est le tenseur de courbure de ∇, la relation (49) nous donne le lift horizontal de la connexion ∇ par rapport à la connexion D, [6], avec l'expression locale

$$(57)\qquad \tilde{\Gamma}^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^{n+i}_{j\,n+k} = \Gamma^i_{jk} \quad , \quad \tilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,k} = G^i_{jk},$$
$$\tilde{\Gamma}^i_{n+j\,n+k} = \tilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\,n+k} = \tilde{\Gamma}^i_{j\,n+k} = \tilde{\Gamma}^i_{n+j\,k} = 0,$$
$$\tilde{\Gamma}^{n+i}_{jk} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - R^i_{ljk} + \nabla_j T^i_{lk} + T^i_{mk}\Gamma^m_{jl}\right) y^l.$$

En particulier, pour $D = \nabla$, on en obtient le lift horizontal de la connexion ∇ par rapport à ∇.

Une connexion $\tilde{\nabla}$ sur TM s'appelle *projetable* (voir aussi [6]) si elle conserve le $\pi_*(C^\infty(M))$–module $\mathscr{P}^1(TM)$ des champs de vecteurs sur TM projetables, c'est-à-dire

$$(58)\qquad \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathscr{P}^1(TM) \Rightarrow \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \in \mathscr{P}^1(TM).$$

De (6) et de l'expression de la dérivée covariante il résulte que la connexion $\tilde{\nabla}$ est projetable si et seulement si les composantes $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ dépendent seulement de x^l et $\tilde{\Gamma}^i_{n+jk}$, $\tilde{\Gamma}^i_{jn+k}$, $\tilde{\Gamma}^i_{n+jn+k}$ sont nulles, [6].

Compte tenu de la Proposition 4.1 on en obtient:

PROPOSITION 4.3. *Le* $\pi_*(C^\infty(M))$*-module affine des connexions linéaires sur* TM, *h-invariantes, est un sous-module de* $\pi_*(C^\infty(M))$*-module affine des connexions lineaires sur* TM, *projetables.*

Remarque 4.4. Une connexion $\tilde{\tilde{\nabla}}$ sur TM, projétable, peut être caractérisée par le fait qu'il existe sur M une connexion ∇, telle que

$$\pi^*(\tilde{\tilde{\nabla}}_{\tilde{\tilde{X}}}\tilde{\tilde{Y}}) = \nabla_{\pi^*\tilde{\tilde{X}}}\,\pi^*\tilde{\tilde{Y}}\,, \qquad \forall \tilde{\tilde{X}}, \tilde{\tilde{Y}} \in \mathscr{P}^1(TM)\,. \tag{59}$$

La connexion ∇ s'appelle la *projection* de $\tilde{\tilde{\nabla}}$.

On peut constater aussi qu'une connexion $\tilde{\tilde{\nabla}}$ sur TM est h-invariante si et seulement s'elle conserve le $\pi_*(C^\infty(M))$-module $\mathscr{H}^1(TM)$, des champs de vecteurs h-invariants sur TM, c'ést-à-dire

$$\forall \tilde{\tilde{X}}, \tilde{\tilde{Y}} \in \mathscr{H}^1(TM) \Rightarrow \tilde{\tilde{\nabla}}_{\tilde{\tilde{X}}}\tilde{\tilde{Y}} \in \mathscr{H}^1(TM)\,. \tag{60}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. CRUCEANU (1968) – *Sur la définition d'une connexion affine*, «C. R. Acad. Sci. Paris», *266*, 532–534.

[2] C. DI COMITE (1969) – *Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe* C^∞, «Annali di Mat.», serie IV, *83*, 133–152.

[3] P. DOMBROWSKI (1962) – *On the geometry of the tangent bundle*, « J. Reine und Angewandte Mathematik», *210*, 73–88.

[4] J. GRIFONE (1972) – *Structure presque tangente et connexions*, «Ann. Inst. Fourier, Grenoble», *22* (1), 287–334; *22* (3), 291–338.

[5] T. NAGANO (1959) – *Isometries on complex-product spaces*, «Tensor», *9*, 47–61.

[6] V. OPROIU – *Some remarkable structures and connetions defined on the tangent bundle*, « Rend. Mat. (Roma)», ser. VI, *6*, 503–540.

[7] S. SASAKI (1958) – *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, «Tohoku Math. J.», *10*, 338–345; *14* (1962), 146–155.

[8] C. Y. WONG (1962) – *Linear connections and quasi-connections on a differentiable manifold*, «Tôhoku Math. Journ.», *14*, 48–63.

[9] K. YANO et S. KOBAYASHI (1966) – *Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles*, « J. Math. Soc. Japan», *18*, 194–210, 236–246.