Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Teresa Bonardi

Estensioni di una trasformazione razionale tra due varietà proiettive a trasformazioni biregolari tra spazi che le contengono

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.6, p. 534–541.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_534_0>

Geometria. — *Estensioni di una trasformazione razionale tra due varietà proiettive a trasformazioni biregolari tra spazi che le contengono.* Nota di MARIA TERESA BONARDI, presentata (*) dal Socio E. TOGLIATTI.

SUMMARY. — Let $\mathbf{P}^n$, $\mathbf{P}^m$ be two projective spaces over an algebrically closed field of characteristic p; let $\varphi : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^m$ be a rational map; let $\mathcal{V}$ be a subvariety of $\mathbf{P}^n$. 1) If $p = 0$, there exists a biregular map $\Phi : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$, with $\mathbf{P}^N \supset \mathbf{P}^m$ and $N \leq m + n + 1 - \dim \operatorname{Im} \varphi$, such that $\Phi|_{\mathcal{V}} = \varphi|_{\mathcal{V}}$. 2) If $\varphi|_{\mathcal{V}}$ is biregular, there exists, whatever p may be, $\Phi' : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ biregular, with $N \leq m + n + 1 - \dim \mathcal{V}$, such that $\Phi'|_{\mathcal{V}} = \varphi|_{\mathcal{V}}$.

1. R. Apery e L. Gauthier hanno provato in [1] che se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$ sono due curve algebriche appartenenti a due spazi proiettivi complessi di ugual dimensione $m \geq 3$, ogni trasformazione birazionale $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ è restrizione di una trasformazione cremoniana tra i due spazi. Per $m = 2$, ciò non è più vero come è noto e come è facile verificare su esempi (1); il risultato di [1], garantisce tuttavia che una trasformazione birazionale φ tra due curve piane è sempre subordinata da una trasformazione cremoniana tra due $\mathbf{P}^3$ contenenti le due curve. Non mi risulta che siano state compiute altre ricerche circa la possibilità di estendere una trasformazione birazionale tra due varietà proiettive $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ ad una trasformazione biregolare (2) tra spazi che le contengono.

È facile vedere che se $\mathcal{V} \subset \mathbf{P}^n$ e $\mathcal{V}' \subset \mathbf{P}^m$, una trasformazione birazionale $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ è sempre la restrizione di una trasformazione biregolare $\Phi : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ con $N \leq m + n + 1$ (cfr. n. 5, nota (10)); qui indicherò come si possa realizzare una siffatta estensione Φ con $N \leq n + m + 1 - \dim \mathcal{V}$. Questo risultato non si può migliorare: ad esempio, se $m = \dim \mathcal{V}$, si ottiene che ogni trasformazione birazionale $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbf{P}^m$ è sempre la restrizione di una trasformazione biregolare $\varphi' : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{n+1}$, mentre, come si è osservato (cfr. nota (1)) φ non è sempre la restrizione di una trasformazione cremoniana di $\mathbf{P}^n$.

Il campo di definizione degli spazi considerati è supposto algebricamente chiuso e di caratteristica p qualunque.

Nel caso $p = 0$, si ottiene un risultato analogo al precedente relativo all'estensione con trasformazioni biregolari di una trasformazione razionale.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1974.

(1) Basta ricordare che esistono curve piane razionali, che non sono cremonianamente isomorfe a $\mathbf{P}^1$. Ad esempio non esiste una corrispondenza cremoniana tra due piani che trasformi in una retta una curva piana di ordine 7 con 15 punti doppi (cfr. [3], III, p. 187).

(2) Se W è una varietà proiettiva qualunque ed $\eta : W \to \mathbf{P}^t$ è un'applicazione razionale di W nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^t$, diremo che η è biregolare se induce isomorfismo tra un aperto di W ed una sottovarietà localmente chiusa di $\mathbf{P}^t$.

2. Indicheremo con $\mathbf{P}_X^n$ e $\mathbf{P}_Y^m$ (n ed m interi positivi) due spazi proiettivi sopra un campo k algebricamente chiuso, di caratteristica $p \geq 0$, aventi rispettivamente dimensioni n ed m e nei quali si assumano come coordinate omogenee $(X_0, \ldots, X_n)$ e $(Y_0, \cdots, Y_m)$. Indicheremo, poi, per ogni $t > m$ con $\mathbf{P}_Y^t$ uno spazio proiettivo (sopra k) di dimensione t, in cui $(Y_0, \cdots, Y_t)$ siano coordinate omogenee e $\mathbf{P}_Y^t$ sia immerso come sottospazio di equazioni $Y_{m+1} = \cdots = Y_t = 0$.

Se $\mathscr{W} \subset \mathbf{P}_X^n$ e $\mathscr{T} \subset \mathbf{P}_Y^t$ sono due varietà proiettive e se $\mathscr{F}$ è la famiglia dei morfismi definiti sopra aperti di $\mathscr{W}$ ed aventi $\mathscr{T}$ come condominio, per applicazione razionale di $\mathscr{W}$ in $\mathscr{T}$, intenderemo una classe di equivalenza di morfismi di $\mathscr{F}$ nella relazione che si ottiene chiamando equivalenti due morfismi che coincidono sopra l'intersezione dei loro aperti di definizione (cfr. [4], Cap. I, § 8). Se $h_0, \cdots, h_t$ sono elementi omogenei tutti dello stesso grado dell'anello $k[\mathscr{W}]$ delle coordinate omogenee di $\mathscr{W}$, diremo che η è descritta da $h_0, \cdots, h_t$, se per tutti i punti A (3) di un aperto di $\mathscr{W}$, si ha:

$$\eta(A) = (h_0(A), \cdots, h_t(A)).$$

Diremo che l'applicazione razionale $\psi : \mathbf{P}_X^n \to \mathbf{P}_Y^t$ subordina $\eta : \mathscr{W} \to \mathscr{T}$, se η e ψ risultano entrambe definite (o, come diremo, regolari) sopra un aperto $\mathscr{E}$ non vuoto di $\mathscr{W}$ e se, per ogni $A \in \mathscr{E}$, risulta:

$$\psi(A) = \eta(A).$$

Chiameremo anche ψ *estensione* di η e scriveremo: $\psi|_{\mathscr{W}} = \eta$. Ci sarà utile il seguente risultato (cfr. [6], lect. 3):

LEMMA 1. *Se* $\alpha : \mathscr{W} \to \mathbf{P}_Y^t$ *è l'applicazione razionale descritta da* $h_0, \cdots h_t$, *affinché* α *sia biregolare è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le due condizioni seguenti*:

(A) *Esiste un aperto* $\mathscr{U}$ *di* $\mathscr{W}$ *tale che per ogni coppia di punti distinti* $P_1, P_2 \in \mathscr{U}$, *uno almeno degli elementi di* $k[\mathscr{W}]$ *del tipo* $\sum_{i=0}^{t} \lambda_i h_i$ $(\lambda_i \in k)$ *si annulli in* P_1 *e non si annulli in* P_2.

(B) *Esiste un punto* $P \in \mathscr{U}$ *tale che – per ogni fissato* $h \in k[\mathscr{W}]$, *omogeneo dello stesso grado delle* h_i *e non nullo in* P – *l'ideale* $m_P \mathcal{O}_{P,\mathscr{W}}$ *cioè l'ideale massimale dell'anello locale di* $\mathscr{W}$ *in* P, *sia generato dalle funzioni del tipo*

$$\frac{\sum_{i=0}^{t} \lambda_i h_i}{h}$$

$(\lambda_i \in k)$, *che si annullano in* P.

OSSERVAZIONE 1. La condizione (A) equivale ad affermare che per ogni coppia di punti distinti $P_1, P_2 \in \mathscr{U}$, risulta $\alpha(P_1) \neq \alpha(P_2)$.

(3) Qui e nel seguito indicheremo con lettere maiuscole A, B, $\cdots$ punti chiusi degli spazi considerati.

OSSERVAZIONE 2. La condizione (B) geometricamente significa che gli spazi tangenti in P alle ipersuperficie di $\mathscr{W}$, passanti per P, non singolari in P, e definite sopra $\mathscr{W}$ dalle equazioni $\sum_{i=0}^{t} \lambda_i h_i = 0$ non hanno in comune alcuna retta dello spazio $T_{P,\mathscr{W}}$ tangente a $\mathscr{W}$ in P.

OSSERVAZIONE 3. Se il campo k ha caratteristica zero, la condizione (B) – come si deduce dalla dimostrazione del lemma – è superflua.

3. Siano:

– $(X_0, \cdots, X_n; Z_0, \cdots, Z_n)$ coordinate biomogenee in $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$;

– $\Lambda_0, \cdots, \Lambda_l$ $(l \geq 1)$ forme tutte dello stesso grado a in $n+1$ variabili e tali che sia proprio l'ideale $\mathscr{I}_{X,Z}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_l)$ generato in $k[K_0, \cdots, X_n; Z_0, \cdots, Z_n]$ dai minori di secondo ordine della matrice

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0(X_0, \cdots, X_n), \cdots, \Lambda_l(X_0, \cdots, X_n) \\ \Lambda_0(Z_0, \cdots, Z_n), \cdots, \Lambda_l(Z_0, \cdots, Z_n) \end{pmatrix}.$$

– $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)$, per ogni aperto $\mathscr{U}$ di $\mathbf{P}^n$, l'unione delle componenti isolate della sottovarietà di $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ definita da $\mathscr{I}_{X,Z}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_n)$, che non coincidono con la diagonale Δ di $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ ed hanno intersezione non vuota con $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$.

– $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_l)$ l'unione delle componenti di $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_l)$ che hanno dimensione maggiore di $n-1$ e che non sono del tipo $A \times \mathbf{P}^n$, con A punto chiuso di $\mathbf{P}^n$.

Vale allora il lemma

LEMMA 2. *Se* $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_l)$ *è non vuota, se* τ *è un ideale omogeneo non nullo di* $k[X_0, \cdots, X_n]$, $f(X_0, \cdots, X_n)$ *è una forma di* 1^o *grado non contenuta in* τ, $\bar{\imath}$ *è uno prefissato degli indici* $0, \cdots, l$ *e* $\mathscr{D}$ *è il sottoinsieme chiuso di* $\mathbf{P}^n : \mathscr{V}(\Lambda_{\bar{\imath}}(X_0, \cdots, X_n) \cdot f(X_0, \cdots, X_n)\, k[X_0, \cdots, X_n]) \cup \mathscr{V}(\tau)$, *esiste una forma* $\Xi_{l+1} \in \tau$, *di grado* $b \geq a$, *tale che – posto:*

$\Xi_j = \Lambda_j(X_0, \cdots, X_n)\, f(X_0, \cdots, X_n)^{b-a}$ $(j = 0, \cdots, l)$ – *risulti*: $\dim \overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{L}}(\Xi_0, \cdots, \Xi_{l+1}) \leq \dim \overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{L}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_l) - 1$, *per ogni aperto* $\mathscr{L} \subset \mathbf{P}^n - \mathscr{D}$ (4).

Dimostrazione. Siano $\mathscr{G}_1, \cdots, \mathscr{G}_\rho$ le componenti isolate di $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{L}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_l)$ e, per ogni $i = 1, \cdots, \rho$, siano A_i, B_i due punti tra loro distinti di $\mathbf{P}^n$, tali che $(A_i, B_i) \in \mathscr{G}_i \cap (\mathscr{L} \times \mathscr{L})$ e scelti – come è lecito – in modo che nessuno dei punti $A_1, \cdots, A_\rho$ coincida con uno dei punti $B_1, \cdots, B_\rho$. Si possono allora determinare una forma $\Theta \in \tau$ che non si annulla in

(4) In tutto il seguito attribuiremo dimensione -1 all'insieme vuoto.

nessuno dei punti A_i [5] ed una forma $\Gamma \in k[X_0, \cdots, X_n]$ tale che risulti: $\Gamma(A_i) \neq 0$ e $\Gamma(B_i) = 0$, per ogni i. Supponiamo (e ciò è sempre possibile) che sia $b = \deg \Theta + \deg \Gamma \geq a$ e poniamo $\Xi_{1+1} = \Gamma\Theta$, $\Xi_j = \Lambda_j(X_0, \cdots, X_n) \cdot f(X_0, \cdots, X_n)^{b-a}$ $(j = 0, \cdots, 1)$ e $J(X_0, \cdots, X_n; Z_0, \cdots, Z_n) = \Xi_i(X_0, \cdots, X_n) \cdot \Xi_{1+1}(Z_0, \cdots, Z_n) - \Xi_i(Z_0, \cdots, Z_n) \cdot \Xi_{1+1}(X_0, \cdots, X_n)$.

Se $A_i = (a_0^{(i)}, \cdots, a_n^{(i)})$ e $B_i = (b_0^{(i)}, \cdots, b_n^{(i)})$ $(i = 1, \cdots, \rho)$, si verifica subito che risulta $J(a_0^{(i)}, \cdots, a_n^{(i)}; b_0^{(i)}, \cdots, b_n^{(i)}) \neq 0$, per ogni i. La varietà $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{L}}(\Xi_0, \cdots, \Xi_1)$ è ancora l'unione di $\mathscr{G}_1, \cdots, \mathscr{G}_\rho$ e per ciò che precede l'ipersuperficie (di $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$) di equazione $J(X_0, \cdots, X_n; Z_0, \cdots, Z_n) = 0$ non passa per nessuna delle $\mathscr{G}_i$. Ogni eventuale componente di $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{L}}(\Xi_0, \cdots, \Xi_{1+1})$ è pertanto contenuta propriamente in una delle $\mathscr{G}_i$ e quindi ha dimensione minore di quella di $\mathscr{G}_i$. La forma Ξ_{1+1} soddisfa dunque alle condizioni dell'enunciato.

OSSERVAZIONE 4. Si vede facilmente che se $\gamma : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^t_Y$ è un'applicazione razionale qualunque, descritta dalle forme $\Gamma_0(X_0, \cdots, X_n), \cdots, \Gamma_t(X_0, \cdots, X_n)$, l'essere vuota la varietà $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Gamma_0, \cdots, \Gamma_t)$ per un aperto non vuoto $\mathscr{U}$ di $\mathbf{P}^n$, implica che γ soddisfi alla condizione (A) del Lemma 1.

Infatti se $q : \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ è la proiezione di $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ sopra il primo fattore e se $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Gamma_0, \cdots, \Gamma_t)$ è vuota, le componenti isolate di $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Gamma_0, \cdots \Gamma_t)$ o hanno dimensione $\leq n - 1$, oppure sono del tipo $A \times \mathbf{P}^n$; di conseguenza si ha: $\dim q(\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Gamma_0, \cdots, \Gamma_t)) \leq n - 1$ e l'aperto $\mathscr{U}' = \mathscr{U} - \{q\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Gamma_0, \cdots, \Gamma_t) \cap \mathscr{U}\}$ è non vuoto. Si vede poi subito che per ogni coppia Q_1, Q_2 di punti chiusi distinti di $\mathscr{U}'$, risulta: $\gamma(Q_1) \neq \gamma(Q_2)$. Infatti se fosse $\gamma(Q_1) = \gamma(Q_2)$, per come è stata definita $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Gamma_0, \cdots, \Gamma_t)$, si avrebbe: (Q_1, Q_2) e $(Q_2, Q_1) \in \mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Gamma_0, \cdots, \Gamma_t)$ è perciò Q_1 e Q_2 non potrebbero appartenere ad $\mathscr{U}'$.

4. Dal Lemma 2 si ricava anzitutto che per ogni fissata applicazione razionale $\lambda : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^m_Y$, le cui fibre abbiano dimensione minima $n - \bar{d}$ [6], e per ogni fissata sottovarietà $\mathscr{C}$ di $\mathbf{P}^n_X$, è possibile definire un'applicazione razionale $\lambda' : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^N_Y$ $(N \leq m + n - \bar{d} + 1)$, la quale subordini λ sopra $\mathscr{C}$ e soddisfi alla condizione (A) del Lemma 1 (e quindi, se $p = 0$, sia biregolare). Precisamente vale la:

PROPOSIZIONE 1. *Siano* $\lambda : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^m_Y$ *la corrispondenza razionale descritta dalle forme (di grado* a*)* $\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m$, $n - \bar{d}$ *la dimensione minima delle fibre di* λ, τ *un ideale proprio omogeneo di* $k[X_0, \cdots, X_n]$ *ed* $f \in k[X_0, \cdots, X_n]$

(5) Siano A_j $(j = 1, \cdots, \sigma)$ quelli tra i punti $A_1, \cdots, A_\rho$ che sono distinti tra loro. Poiché $A_j \notin \mathscr{V}(\tau)$, esiste, per ogni A_j, una forma $\vartheta_j \in \tau$ tale che $\vartheta_j(A_j) \neq 0$; si può poi scegliere per ogni A_j, una forma λ_j tale che $\lambda_j(A_j) \neq 0$ e $\lambda_j(A_t) = 0$, per $t \neq j$. Si può supporre che i prodotti $\lambda_j \vartheta_j$ abbiano tutti lo stesso grado e si può porre $\Theta = \sum_{j=0}^{t} \lambda_j \vartheta_j$.

(6) Cioè $n - \bar{d}$ sia la dimensione minima delle fibre (non vuote) di ogni morfismo appartenente a λ.

una forma lineare non contenuta in τ. *Allora esistono, in* τ, $h \leq n - \bar{d} + 1$ *forme* $\Xi_{m+1}, \cdots, \Xi_{m+h}$, *tutte dello stesso grado* $b \geq a$, *tali che la corrispondenza razionale* $\lambda' : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^{m+h}_Y$ *descritta da* $\Lambda_0 f^{b-a}, \cdots, \Lambda_m f^{b-a}, \Xi_{m+1}, \cdots, \Xi_{m+h}$, *soddisfi alla condizione* (A) *del Lemma 1 (e quindi sia biregolare, se* $p = 0$).

Dimostrazione. Se esiste un aperto $\mathscr{L}$ non vuoto di $\mathbf{P}^n$ tale che la varietà $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{L}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m)$ sia vuota, λ stessa per l'Osservazione 4, soddisfa alla condizione (A) (e, ovviamente, ciò vale per ogni applicazione $\lambda' : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^{m+h}_Y$ descritta da $m + h + 1$ forme $\Lambda_0 f^{b-a}, \cdots, \Lambda_m f^{b-a}, \Xi_{m+1}, \cdots, \Xi_{m+h}$ del tipo precisato sopra).

In caso contrario – sempre per l'Osservazione 4 – basta provare che si possono determinare un aperto $\mathscr{L} \subset \mathbf{P}^n$ e delle forme $\Xi_{m+1}, \cdots, \Xi_{m+h}$ – in numero $h \leq n - \bar{d} + 1$ – in modo che sia vuota la varietà $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{L}}(\Lambda_0 f^{b-a}, \cdots \cdots, \Lambda_m f^{b-a}, \Xi_{m+1}, \cdots, \Xi_{m+h})$.

Ciò segue senz'altro dal Lemma 2, purché si osservi che per le ipotesi, esiste un aperto non vuoto $\mathscr{U}$ di $\mathbf{P}^n$ tale che per ogni punto chiuso $U \in \mathscr{U}$, le componenti irriducibili di $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m) \cap (U \times \mathscr{U})$ [7] abbiano tutte dimensione $n - \bar{d}$; e che, di conseguenza, si ha dim $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m) \leq 2n - \bar{d}$ [8].

5. Sia ora $\mathfrak{a} \subset k[X_0, \cdots, X_n]$ un ideale proprio, primo, omogeneo e sia $k[x_0, \cdots, x_n] = k[X_0, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$ graduato con la graduazione indotta da quella di $k[X_0, \cdots, X_n]$ per passaggio al quoziente modulo $\mathfrak{a}$. Siano inoltre $\mathscr{V} = \operatorname{Proj} k[x_0, \cdots, x_n]$ e $\varphi : \mathscr{V} \to \mathbf{P}^m_Y$ un'applicazione razionale. Si vede facilmente che se φ è regolare in $P \in \mathscr{V}$, esistono un intorno aperto $\mathscr{U}_P$ di P in $\mathscr{V}$ ed $m + 1$ elementi di $k[x_0, \cdots, x_n]$: $\varphi_0(x_0, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_m(x_0, \cdots, x_n)$, tutti omogenei dello stesso grado r, tali che per ogni punto chiuso $Q = (q_0, \cdots, q_n) \in \mathscr{U}_P$, risulti: $\varphi(Q) = (\varphi_0(q_0, \cdots, q_n), \cdots, \varphi_m(q_0, \cdots, q_n))$ [9], cioè φ sia descritta da $\varphi_0, \cdots, \varphi_m$.

Per ogni $i = 0, \cdots, n$, consideriamo una forma $\varphi_i(X_0, \cdots, X_n) \in \in k[X_0, \cdots, X_n]$ (di grado r) avente $\varphi_i(x_0, \cdots, x_n)$ come immagine nell'omomorfismo canonico $k[X_0, \cdots, X_n] \to k[x_0, \cdots, x_n]$. Se $p = 0$, applicando la Proposizione 1 alla corrispondenza razionale $\Phi : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^m_Y$ descritta da

(7) Ad $U \times \mathscr{U}$ e $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m) \cap (U \times \mathscr{U})$ si attribuisce la struttura di varietà algebrica indotta da quella di $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$.

(8) Se $\mathscr{G}$ è una componente di $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m)$ e se $\mathscr{H}$ è una componente di $\mathscr{G} \cap (U \times \mathscr{U})$, si ha: dim $\mathscr{H} = n - \bar{d} \geq$ dim $\mathscr{G}$ + dim$(U \times \mathscr{U}) - 2n$ e quindi: dim $\mathscr{G} \leq 2n - \bar{d}$.

(9) Sia $\varphi' : \mathscr{U} \to \mathbf{P}^n_X$ un morfismo appartenente a φ, definito in un aperto $\mathscr{U}$ contenente P. Se $P' = \varphi(P)$ appartiene all'aperto affine standard $\mathscr{S}_j$, complementare in $\mathbf{P}^m_Y$ di $Y_j = 0$, φ' induce un omomorfismo di anelli φ^*_j: $\Gamma(\mathscr{S}_j, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^m}) \to \Gamma(\varphi'^{-1}\mathscr{S}_j, \mathscr{O}_{\mathscr{U}}) = \Gamma(\varphi'^{-1}\mathscr{S}_j, \mathscr{O}_{\mathscr{V}})$. Le funzioni $\varphi^*_j\left(\frac{Y_l}{Y_j}\right)$ $(l = 0, \cdots, m; l \neq j)$ possono essere rappresentate, in un intorno $\mathscr{U}_P$ di P con dei quozienti $\frac{\varphi_l(x_0, \cdots, x_n)}{\varphi_j(x_0, \cdots, x_n)}$ di forme di $k[x_0, \cdots, x_n]$, tutte dello stesso grado; se $Q \in \mathscr{U}_P$, $\varphi^*_j\left(\frac{Y_l}{Y_j} - \frac{\varphi_l(Q)}{\varphi_j(Q)}\right)$ si annulla in Q, quindi $\frac{Y_l}{Y_j} - \frac{\varphi_l(Q)}{\varphi_j(Q)}$ si annulla in φ(Q. Ne segue subito che $(\varphi_0(Q), \cdots, \varphi_m(Q))$ sono coordinate omogenee per $\varphi(Q)$.

$\varphi_0(X_0, \cdots, X_n), \cdots, \varphi_m(X_0, \cdots, X_n)$, ed osservando che la dimensione minima delle fibre di Φ non supera $n - \dim \mathscr{V}$, si ha subito che esiste un'applicazione biregolare $\Phi' : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^{m+n+1-\dim \mathscr{V}}$ tale che $\Phi'_{|\mathscr{V}} = \Phi_{|\mathscr{V}} = \varphi$. Se φ è biregolare questo risultato vale, come vedremo, per qualunque valore di p [10].

Supponiamo, dunque, che φ sia biregolare in un aperto contenente il punto P di cui sopra e poniamo: $d = \dim \mathscr{V}$. Si può ammettere senza aggiungere limitazioni alle nostre considerazioni che il punto P sia semplice per $\mathscr{V}$, che appartenga all'aperto affine standard (di $\mathbf{P}^n_X$) $\mathscr{U}_0$, complementare di $X_0 = 0$ e che inoltre sia $\varphi(P) = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbf{P}^m_Y$ (ossia che $\varphi_0(P) \neq 0$ e $\varphi_i(P) = 0$ per $i = 1, \cdots, m$).

Posto $X'_i = \frac{X_i}{X_0}$ (per ogni $i = 1, \cdots, n$), se $\mathfrak{a}_0$ è l'ideale di $\mathscr{V} \cap \mathscr{U}_0$ in $k[X'_1, \cdots, X'_n]$, è possibile scegliere $n - d$ polinomi $g_1, \cdots, g_{n-d} \in \mathfrak{a}_0$ in modo che $\mathfrak{a}_0$ sia una componente primaria isolata dell'ideale $(g_1, \cdots, g_{n-d}) k[X'_1, \cdots, X'_n]$ e in modo che la matrice jacobiana $\frac{\partial(g_1, \cdots, g_{n-d})}{\partial(X'_1, \cdots, X'_n)}$ possieda almeno un minore di ordine $n - d$ non nullo in P (cfr. ad esempio [2], Lemma 1).

Posto $a = \max\{r, \deg g_1, \cdots, \deg g_{n-1}\}$ consideriamo le $m + n - d + 1$ forme di grado a:

$$\Phi_j = X_0^{a-r}\, \varphi_j(X_0, \cdots, X_r) \qquad (j = 0, \cdots, m)$$

$$\Phi_{m+i} = X_0^{a-\deg g_i}\, g_i\left(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_r}{X_0}\right) \qquad (i = 1, \cdots, n-d).$$

Proveremo che:

PROPOSIZIONE 2. *Esiste una forma* $\psi_{m+n-d+1} \in \mathfrak{a}$, *di grado* $b \geq a$, *tale che, se* f *è una qualunque forma lineare, non nulla in* P, *e se* $\psi_i = \Phi_i f^{b-a}$ $(i = 0, \cdots, m + n - d)$ *l'applicazione razionale* $\varphi_e : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^{m+n-d+1}_Y$ *descritta da* $\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1}$ *(la quale subordina* φ *sopra* $\mathscr{V}$*) sia biregolare.*

Premettiamo le seguenti osservazioni

OSSERVAZIONE 5. Se $\mathfrak{b} = (\Phi_{m+1}, \cdots, \Phi_{m+n-d})\, k[X_0, \cdots, X_n]$, $\mathscr{V}$ è l'unica componente di $\mathscr{V}(\mathfrak{b})$ passante per P e quindi la varietà $\mathscr{S}$, chiusura in $\mathbf{P}^n_X$ di $\mathscr{V}(\mathfrak{b}) - \mathscr{V}$, non contiene P. Siano $\mathscr{C}$ un chiuso di $\mathscr{V}$ tale che φ sia biregolare sopra $\mathscr{V} - \mathscr{C}$ ed $\mathscr{A} = \mathbf{P}^n - (\mathscr{S} \cap \mathscr{C})$. Allora, *se* Q_1 e Q_2 *sono due qualunque punti distinti di* $\mathscr{A}$ *e se, inoltre,* $Q_1 \in \mathscr{V}$, *esiste una forma* g *del tipo* $\sum_{i=0}^{m+n-d} \lambda_i \Phi_i$ $(\lambda_i \in k)$ *tale che risulti* : $g(Q_1) = 0$ *e* $g(Q_2) \neq 0$.

Infatti, se anche $Q_2 \in \mathscr{V}$, ciò – per la biregolarità di φ sopra $\mathscr{A} \cap \mathscr{V}$ – segue subito dal Lemma 1. Se, invece, $Q_2 \notin \mathscr{V}$, per come è stato scelto $\mathscr{A}$, una almeno delle forme $\Phi_{m+1}, \cdots, \Phi_{m+n-d}$ è non nulla in Q_2 ed è certamente nulla in Q_1.

(10) Sarebbe immediato estendere φ ad una corrispondenza biregolare di $\mathbf{P}^n_X$ in $\mathbf{P}^{n+m+1}_Y$. Se infatti ω è una corrispondenza birazionale di $\mathbf{P}^n_X$ sopra uno spazio proiettivo n-dimensionale qualunque, descritta dalle forme $\Omega_0, \cdots, \Omega_n$ di ordine s, se $\zeta \in \mathfrak{a}$ e $\xi \notin \mathfrak{a}$ sono due forme tali che $\deg \zeta + s = \deg \xi + r$, la corrispondenza $\Omega : \mathbf{P}^n_X \to \mathbf{P}^{m+n+1}_Y$ descritta da $\xi\Phi_0, \cdots, \xi\Phi_m, \zeta\Omega_0, \cdots, \zeta\Omega_n$ subordina φ sopra $\mathscr{V}$ e soddisfa ovviamente alle condizioni (A) e (B) del Lemma 1, ossia è biregolare.

OSSERVAZIONE 6. Sia $\psi : \mathbf{P}_X^n \to \mathbf{P}_Y^{m+n-d}$ la corrispondenza razionale descritta da $\Phi_0, \cdots, \Phi_{m+n-d}$; chiaramente appartiene a ψ un morfismo $\psi' : \mathscr{A} \to \mathbf{P}_Y^{m+n-1}$ (tale che $\psi'(Q) = (\Phi_0(Q), \cdots, \Phi_{m+n-d}(Q))$, per ogni $Q \in \mathscr{A}$). Per la semicontinuità superiore della dimensione delle fibre di un morfismo (cfr. [5], Cap. I, § 8, Coroll. 3 del Teor. 3) e per l'Osservazione 5, esiste allora un aperto non vuoto $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ tale che ogni $A \in \mathscr{A}'$ sia punto isolato di $\psi'^{-1}\psi(A)$ ed anzi $\psi'^{-1}\psi(A) \cap \mathscr{A}'$ contenga soltanto punti isolati (11). Di conseguenza risulta necessariamente, per ogni $A \in \mathscr{A}'$: $\dim [\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{A}'}(\Phi_0, \cdots, \Phi_{m+n-d}) \cap (A \times \mathscr{A}')] \leq 0$ e quindi: $\dim \overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{A}'}(\Phi_0, \cdots \cdots, \Phi_{m+n-d}) \leq n$.

6. Venendo alla dimostrazione della Proposizione 2, consideriamo intanto il caso in cui: $\dim \overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{A}'}(\Phi_0, \cdots, \Phi_{m+n-d}) = n$ (cioè $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{A}'}(\Phi_0, \cdots \cdots, \Phi_{m+n-d})$ è non vuota). Siano: f una forma lineare tale che $f(P) \neq 0$, $\mathscr{D} = \mathscr{V}(\Phi_0 f k[X_0, \cdots, X_n]) \cap \mathscr{S}$ ed $\mathscr{L} = \mathscr{A}' \cap (\mathbf{P}^n - \mathscr{D})$. Per il Lemma 2, è possibile scegliere una forma $\psi_{m+n-d+1} \in \mathfrak{a}$ di grado $b \geq a$, tale che – se $\psi_j = \Phi_j f^{b-a}$ – la varietà $\overline{\mathscr{V}}_{X,Z,\mathscr{L}}(\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1})$ sia vuota. Allora l'applicazione $\varphi_e : \mathbf{P}_X^n \to \mathbf{P}_Y^{m+n-d+1}$ descritta da $\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1}$ verifica la condizione (A) del Lemma 1, per ogni coppia di punti dell'aperto $\mathscr{U} = \mathscr{L} - \{q\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1}) \cap \mathscr{L}\}$.

Occorre ora dimostrare che per φ_e è soddisfatta anche la condizione (B). Si può intanto vedere facilmente che gli iperpiani tangenti in P a quelle tra le ipersuperficie $\sum_{i=1}^{m+n-d+1} \lambda_i \psi_i = 0$ $(\lambda_i \in k)$ (12) che non sono singolari in P, non hanno in comune alcuna retta di $\mathbf{P}^n$. Ciò equivale a dire che per ogni punto L del tipo $(0, l_1, \cdots, l_n)$ esiste una forma $\psi = \sum_{i=1}^{m+n-d+1} \lambda_i \psi_i$, che si annulla in P e tale che sia: $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_j}\right)_P l_j \neq 0$.

Se L appartiene allo spazio $T_{P,\mathscr{V}}$ tangente in P a $\mathscr{V}$ – per la biregolarità di φ sopra $\mathscr{V}$ (cfr. Osservazione 2) – questa condizione è certo soddisfatta da una forma del tipo $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i$. Se $L \notin T_{P,\mathscr{V}}$, essa è soddisfatta da almeno una delle forme $\psi_{m+1}, \cdots, \psi_{m+n-d}$: si ricordi, infatti che i polinomi $g_1, \cdots, g_{n-d}$ (dai quali si ottengono $\psi_{m+1}, \cdots, \psi_{m+n-d}$, moltiplicando ciascuno di essi per potenze opportune di X_0 e di f) sono tali che la matrice $\frac{\partial(g_1, \cdots, g_{n-d})}{\partial(X_1', \cdots, X_n')}$ possiede almeno un minore di ordine $n - d$ non nullo in P e quindi

(11) Si osservi che se $\mathscr{R}$ è una componente di $\psi'^{-1}\psi(A)$ e se $R \in \mathscr{R} \cap \mathscr{A}'$, $\mathscr{R}$ si può riguardare come componente di $\psi'^{-1}\psi(R)$.

(12) Per l'ipotesi che $\varphi(P) = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbf{P}^n$ e per come sono state scelte $\psi_{m+1}, \cdots, \psi_{m+n-d+1}$, risulta $\psi_0(P) \neq 0$ e $\psi_i(P) = 0$ per $i = 1, \cdots, m+n-d+1$. Pertanto le forme $\sum_{i=1}^{m+n-d+1} \lambda_i \psi_i$ sono tutte e sole le combinazioni lineari (a coefficienti in k) di $\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1}$ che si annullano in P.

l'intersezione degli $n-d$ iperpiani tangenti in P alle ipersuperficie $\psi_{m+j}(X_0, \cdots, X_n) = 0$ $(j = 1, \cdots, n-d)$ è esattamente $T_{P,\mathscr{V}}$.

Per concludere che φ_e soddisfa la condizione (B), basta ora provare che il punto P è contenuto nell'aperto $\mathscr{U} = \mathscr{L} - \{q\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{L}}(\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1}) \cap \mathscr{L}\}$, nel quale – come si è visto – ψ_e verifica certamente la condizione (A).

Per come è stato scelto $\mathscr{L}$, $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{L}}(\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1})$ non può passare per nessun punto del tipo (P, Q) con $Q \neq P$; pertanto è sufficiente escludere che appartenga a $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{L}}(\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1})$ il punto (P, P). Se così fosse – poiché $(P, P) \in \Delta$ – passerebbero per P almeno due componenti distinte della varietà $\mathscr{V}_{X,Z}(\psi_0, \cdots, \psi_{m+n-d+1})$ definita dell'ideale $\mathscr{I}_{X,Z}(\psi_0, \cdots$ $\cdots, \psi_{m+n-d+1})$ e quindi, per essa (P, P) sarebbe punto singolare. Ciò è impossibile, come si vede facendo ricorso al criterio jacobiano (cfr. [7], Teor. 7), tenendo presente che $(P, P) \subset \mathscr{U}_0 \times \mathscr{U}_0$ ed osservando che – se $\psi_{i,j} = \psi_i(X_0, \cdots, X_n)\ \psi_j(Z_0, \cdots, Z_n) - \psi_i(Z_0, \cdots, Z_n)\ \psi_j(X_0, \cdots, X_n)$ $(0 \leq i, j \leq m+n-d+1\ ;\ i < j)$ – tra i minori di ordine n della matrice $\left(\frac{\partial(\psi_{0,1}, \cdots, \psi_{m+n-d,\, m+n-d+1})}{\partial(X_1, \cdots, X_n, Z_1, \cdots, Z_n)}\right)_{(P,P)}$, ci sono i minori dello stesso ordine n della matrice $\left(\frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_{m+n-d+1})}{\partial(X_1, \cdots, X_n)}\right)_P$ (moltiplicati per $(\psi_0(P))^n$) e questi non sono tutti nulli perché, per quanto si è visto sopra, le equazioni $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial X_j}\right)_P X_j = 0$ $(i = 1, \cdots, m+n-d+1)$ non hanno alcuna soluzione propria in comune.

7. Se $\mathscr{V}_{X,Z,\mathscr{U}}(\Phi_0, \cdots, \Phi_{m+n-d})$ è vuota, con le stesse considerazioni fatte sopra φ_e, si vede che già l'applicazione ψ è biregolare e che lo stesso vale per ogni sua estensione φ_e, descritta da $m+n-d+1$ forme del tipo $\Phi_0 f^{b-a}, \cdots, \Phi_{m+n-d} f^{b-a}, \psi_{m+n-d+1}$, ove $\psi_{m+n-d+1}$ si può scegliere in modo arbitrario entro l'ideale $\mathfrak{a}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. APÉRY e L. GAUTHIER (1943) – *Extensions des transformations birationnelles des courbes de l'espace ordinaire à l'espace ambient*, « Com. Rend. Académie des Sciences », *217*, 129–131.

[2] M. T. BONARDI (1967) – *Sulle ipersuperficie aventi una varietà algebrica assegnata come luogo di punti singolari*, « Le Matematiche », *22* (1), 10–18.

[3] F. ENRIQUES (1924) – *Lezioni di teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III, Zanichelli.

[4] A. GROTHENDIECK e I. A. DIEUDONNÉ (1971) – *Eléments de géométrie algébrique*. Springer-Verlag.

[5] D. MUMFORD – *Introduction to algebraic geometry*.

[6] I. R. SHAFAREVIC (1960) – *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[7] O. ZARISKI (1947) – *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*, « Trans. Am. Math. Soc. », *62*, 1–52.