Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Dantoni

Sui riferimenti rispetto ai quali una data corrispondenza fra sistemi relazionali è omomorfa

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.6, p. 491–501.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_491_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Algebra universale. — *Sui riferimenti rispetto ai quali una data corrispondenza fra sistemi relazionali è omomorfa.* Nota di GIOVANNI DANTONI, presentata [*] dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Correspondences between relational systems which are homomorphic with respect to some reference system are studied. Five types of homomorphism conditions are discussed. Normal references in which a correspondence between relational systems is a homomorphic correspondence of a certain type are examined, and the cases in which there is only one of these reference systems are determined.

1. Siano $(M, \mathscr{R})$ ed $(M', \mathscr{R}')$ sistemi relazionali con M, M' insiemi sostegno ed $\mathscr{R}, \mathscr{R}'$ insiemi di relazioni definite rispettivamente su M e su M'. Supponiamo inoltre che per ogni $R \in \mathscr{R}$ esista $R' \in \mathscr{R}'$ avente la stessa arità di R, e per ogni $R' \in \mathscr{R}'$ esista $R \in \mathscr{R}$ avente la stessa arità di R'. Chiameremo *riferimento normale* di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ ogni corrispondenza ρ *da tutto $\mathscr{R}$ a tutto $\mathscr{R}'$* tale che da $(R, R') \in \rho$ segue che R ed R' hanno la stessa arità.

La definizione di corrispondenza omomorfa da $(M, \mathscr{R})$ ad $(M', \mathscr{R}')$ si può porre in vari modi.

Si può dire che (Definizione I) una corrispondenza φ da tutto M ad M' si chiama *omomorfa rispetto ad un prefissato riferimento normale* ρ di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ quando ogni $(R, R') \in \rho$ soddisfa ad una certa condizione X (che chiameremo condizione di omomorfismo X).

Si può dire che (Definizione II) una corrispondenza φ da tutto M ad M' si chiama *omomorfa quando esiste un riferimento normale* ρ di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ tale che ogni $(R, R') \in \rho$ soddisfa alla condizione d'omomorfismo X.

La Definizione I è l'estensione alle corrispondenze della definizione di applicazione omomorfa (o omomorfismo) fra sistemi relazionali dello stesso tipo. La Definizione II è sostanzialmente l'estensione alle corrispondenze fra sistemi relazionali della definizione di omomorfismo debole fra algebre, nel caso che il sistema delle operazioni fondamentali coincida con quello delle operazioni algebriche, data da A. Goetz nel 1964 [1].

Per la Definizione I una corrispondenza omomorfa è una coppia (φ, ρ) costituita da una corrispondenza φ da tutto M ad M' e da un riferimento normale ρ di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ (rispetto al quale φ è omomorfa). Se consideriamo distinte due tali coppie (φ, ρ) e (φ_1, ρ_1) quando è $\varphi \neq \varphi_1$ *oppure* $\rho \neq \rho_1$, allora *per una data φ la Definizione I e la Definizione II coincidono se e solo se la φ è omomorfa rispetto ad un solo riferimento normale.*

(*) Nella seduta del 14 novembre 1974.
(1) Goetz [1].

In questo lavoro studiamo i riferimenti normali rispetto ai quali *una data corrispondenza* φ *da tutto* M *ad* M′ *è omomorfa, con particolare riguardo al caso in cui di tali riferimenti ne esiste uno solo.*

Esponiamo ora alcuni dei risultati che dimostreremo nei nn. 4–8.

Nel n. 4 diamo la definizione di corrispondenza omomorfa φ (da tutto M ad M′) rispetto al riferimento normale ρ. Considereremo cinque tipi di condizioni di omomorfismo: A , B , C , D , E, e quindi cinque tipi di corrispondenze omomorfe rispetto al riferimento normale ρ, e li indicheremo con tipo A , B , C , D , E. Se φ è un'applicazione i cinque tipi si riducono a tre: B , D , E. Se φ è un'applicazione e i sistemi $(M , \mathcal{R})$ ed $(M', \mathcal{R}')$ sono algebre, i tipi si riducono a due: D , E , che sono gli usuali omomorfismi di un'algebra in e su tutta un'altra algebra dello stesso tipo Questa proprietà, ben nota, viene da noi completata con la seguente:

Se $(M , \mathcal{R})$ *ed* $(M', \mathcal{R}')$ *sono algebre e se ogni* $x \in M$ *è il risultato di qualche operazione di* $\mathcal{R}$, *allora ogni corrispondenza omomorfa di tipo* B *rispetto al riferimento normale* ρ *è un'applicazione.*

Se φ è una corrispondenza omomorfa di tipo X (X = A , B , C , D , E) rispetto a qualche riferimento normale, allora l'insieme dei riferimenti normali rispetto ai quali φ è omomorfa di tipo X ha il massimo che indicheremo con $\overline{\rho}_X$ e ogni riferimento normale ρ che sia sottoinsieme di $\overline{\rho}_X$ è tale che φ risulta omomorfa di tipo X rispetto a ρ Da ciò segue che se si conosce $\overline{\rho}_X$, si conoscono anche tutti i riferimenti normali rispetto ai quali φ è omomorfa di tipo X e quindi si può vedere se fra essi ce ne sono di particolarmente semplici o particolarmente adatti allo studio di determinate questioni.

Il riferimento normale massimo $\overline{\rho}_X$ si costruisce in modo molto semplice per i tipi E e D (n. 6). Inoltre, detta ancora φ una corrispondenza da tutto M ad M′, si ha (n. 6 a):

Se φ *è omomorfa di tipo* E *rispetto a qualche riferimento normale, allora essa è omomorfa di tipo* E *rispetto ad* ***un*** *solo riferimento normale.*

Se φ è omomorfa di tipo D rispetto a qualche riferimento normale, allora in generale il riferimento normale rispetto al quale φ è omomorfa di tipo D non è unico. Tuttavia, in questo caso (tipo D), per la particolare semplicità di $\overline{\rho}_D$, le condizioni di unicità si determinano facilmente (n. 6 b).

Nel caso generale si ha il seguente Teorema (n. 7);

Se ρ *è omomorfa di tipo* X (X = A , B , C , D , E) *rispetto a qualche riferimento normale, allora affinché essa sia omomorfa di tipo* X *rispetto ad un solo riferimento normale è necessario e sufficiente che gli insiemi* $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, $\overline{\rho}_X$ *si possano decomporre nel seguente modo*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 , \quad \textit{con} \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \varnothing ; \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{R}'_2 , \quad \textit{con} \quad \mathcal{R}'_1 \cap \mathcal{R}'_2 = \varnothing ;$$

$\overline{\rho}_X = \rho_1 \cup \rho_2$, *con* ρ_1 *applicazione di* $\mathcal{R}_1$ *su tutto* $\mathcal{R}'_1$ *ed* ρ_2^{-1} *applicazione di* $\mathcal{R}'_2$ *su tutto* $\mathcal{R}_2$.

Nel n. 8, invece di riferimenti normali (che sono corrispondenze da tutto $\mathcal{R}$ *a tutto* $\mathcal{R}'$), consideriamo certe corrispondenze σ da tutto $\mathcal{R}$ *ad* $\mathcal{R}'$ che chiamiamo regolari e complete. Poniamo la definizione di corrispondenza φ, da tutto M ad M′, omomorfa di tipo X rispetto a una corrispondenza σ regolare e completa. Proviamo che *una corrispondenza* φ *da tutto* M *ad* M′ *è omomorfa di tipo* X *rispetto a qualche corrispondenza* σ *regolare e completa allora e solo quando essa é omomorfa di tipo* X *rispetto a qualche riferimento normale di* $\mathscr{R}$ *ed* $\mathscr{R}'$, e determiniamo le condizioni di unicità di σ. In particolare proviamo che una corrispondenza φ da tutto M ad M′ è omomorfa di tipo D rispetto a qualche *applicazione* regolare e completa di $\mathscr{R}$ in $\mathscr{R}'$, allora e solo quando essa è omomorfa di tipo D rispetto a qualche riferimento normale. Infine notiamo che:

Se una corrispondenza φ *da tutto* M *ad* M′ *è omomorfa di tipo* D *rispetto a qualche applicazione regolare e completa, allora essa è omomorfa di tipo* D *rispetto ad una sola di tali applicazioni se e solo se relazioni distinte di* $\mathscr{R}'$ *hanno restrizioni distinte in* $M\varphi$.

2. Sia M un insieme non vuoto e sia α un ordinale ≥ 1. Chiameremo relazione di arità α definita su M un qualunque sottoinsieme non vuoto di M^α. Un elemento di M^α lo chiameremo una α–sequenza di elementi di M e lo indicheremo con $(a_0, a_1, \cdots, a_\gamma, \cdots)_{\gamma<\alpha}$ $(a_\gamma \in \mathbf{M})$.

Siano M ed M′ insiemi non vuoti e *sia* φ *una corrispondenza da tutto* M *ad* M′; cioè φ è un sottoinsieme di $M \times M'$ tale che ogni $x \in M$ è primo elemento di qualche coppia $(x, x') \in \varphi$.

Nel seguito *indicheremo con* $M\varphi$ l'immagine di M in M′ mediante la φ, cioè l'insieme dei secondi elementi delle coppie di φ. Inoltre se $a = (a_0, a_1, \cdots$ $\cdots, a_\gamma, \cdots)_{\gamma<\alpha}$ è una α–sequenza di elementi di M, *indicheremo con* $a\varphi$ l'insieme delle α–sequenze di elementi di M′, $a' = (a'_0, a'_1, \cdots, a'_\gamma, \cdots)_{\gamma<\alpha}$ tali che $(a_0, a'_0) \in \varphi$, $(a_1, a'_1) \in \varphi, \cdots, (a_\gamma, a'_\gamma) \in \varphi, \cdots$. Se R è una relazione di arità α definita su M, *indicheremo con* $R\varphi$ la relazione di arità α definita su M′ nel seguente modo: $R\varphi = \bigcup_{a \in R} a\varphi$. Se R′ è una relazione di arità α definita su M′ *indicheremo con* $[R']_{M\varphi}$ l'insieme $[R']_{M\varphi} = R' \cap (M\varphi)^\alpha$ e diremo che $[R']_{M\varphi}$ è la *restrizione di* R′ *in* $M\varphi$. Se è $R' \cap (M\varphi)^\alpha \neq \varnothing$, allora $[R']_{M\varphi}$ è una relazione di arità α definita su $M\varphi$.

3. *Siano* $(M, \mathscr{R})$ *ed* $(M', \mathscr{R}')$ *sistemi relazionali* (2). Cioè M ed M′ sono insiemi non vuoti, $\mathscr{R}$ è un insieme di relazioni definite su M, $\mathscr{R}'$ è un insieme di relazioni definite su M′.

Diremo che $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ sono *riferibili* quando: 1) Per ogni $R \in \mathscr{R}$ esiste $R' \in \mathscr{R}'$ avente la stessa arità di R. 2) Per ogni $R' \in \mathscr{R}'$ esiste $R \in \mathscr{R}$ avente la stessa arità di R′.

(2) $(M, \mathscr{R})$ ed $(M', \mathscr{R}')$ possono essere, in particolare, algebre universali. $(M, \mathscr{R})$ è un'algebra universale quando per ogni $R \in \mathscr{R}$ si ha che: 1) la arità α di R è $\alpha = \beta + 1$, con β ordinale; 2) esiste una operazione F di arità β definita su M, tale che le α–sequenze che sono elementi di R sono tutte e sole quelle del tipo $(a_0, a_1, \cdots, a_\gamma, \cdots, F)_{\gamma<\beta}$ con $a_\gamma \in M$ ed $F = F(a_0, a_1, \cdots, a_\gamma, \cdots)$.

Se $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ sono riferibili diremo che l'ordinale α è una *arità possibile* quando esiste $R \in \mathscr{R}$ di arità α.

Se $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ sono riferibili *indicheremo con* $\mathscr{R} \otimes \mathscr{R}'$ l'insieme delle coppie (R, R') con $R \in \mathscr{R}$ ed $R' \in \mathscr{R}'$ avente la stessa arità di R.

Se $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ sono riferibili *chiameremo riferimento normale di* $\mathscr{R}$ *ed* $\mathscr{R}'$ ogni corrispondenza ρ da tutto $\mathscr{R}$ a tutto $\mathscr{R}'$ tale che da $(R, R') \in \rho$ segue che R ed R' hanno la stessa arità. Cioè è $\rho \subseteq \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}'$, l'insieme dei primi elementi delle coppie di ρ è $\mathscr{R}$, e l'insieme dei secondi elementi delle coppie di ρ è $\mathscr{R}'$.

Notiamo che se $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ sono riferibili, allora $\mathscr{R} \otimes \mathscr{R}'$ è un riferimento normale di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$. Inoltre $\mathscr{R} \otimes \mathscr{R}'$ è l'unico riferimento normale di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ allora e solo quando per ogni arità possibile α si ha che o $\mathscr{R}$ contiene una sola relazione di arità α, oppure $\mathscr{R}'$ contiene una sola relazione di arità α.

Osservazione. Se $(M, \mathscr{R})$ ed $(M', \mathscr{R}')$ sono sistemi relazionali dello stesso tipo, allora è dato un insieme Ω di indici, ciascuno con una data arità, e ad ogni $\omega \in \Omega$ corrisponde un $R_\omega \in \mathscr{R}$ ed un $R'_\omega \in \mathscr{R}'$. L'insieme ρ delle coppie (R_ω, R'_ω)

$$\rho = \{ (R_\omega, R'_\omega) \mid \omega \in \Omega \}$$

è un riferimento normale di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$, mentre l'insieme Ω si può chiamare semplicemente un *riferimento* di $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$. La corrispondenza che associa ad ogni $\omega \in \Omega$ la coppia (R_ω, R'_ω) è un'applicazione di Ω su tutto ρ che conserva la arità, e ρ è determinato da Ω (ma non viceversa).

4. *Siano* $(M, \mathscr{R})$ *ed* $(M', \mathscr{R}')$ *sistemi relazionali con* $\mathscr{R}$ *ed* $\mathscr{R}'$ *riferibili, sia* φ *una corrispondenza da tutto* M *ad* M', *e sia* ρ *un riferimento normale di* $\mathscr{R}$ *ed* $\mathscr{R}'$.

Diremo che φ *è una corrispondenza omomorfa di tipo* A, *o* B, *o* C, *o* D, *o* E, *rispetto al riferimento nomale* ρ, *quando per ogni* $(R, R') \in \rho$ *si ha rispettivamente*:

(A) $\qquad a\varphi \cap [R']_{M\varphi} \neq \varnothing \qquad$ per ogni $\quad a \in R$

(B) $\qquad R\varphi \subseteq [R']_{M\varphi}$

(C) $\qquad [R']_{M\varphi} \subseteq R\varphi \quad$ e $\quad a\varphi \cap [R']_{M\varphi} \neq \varnothing \qquad$ per ogni $\quad a \in R$

(D) $\qquad R\varphi = [R']_{M\varphi}$

(E) $\qquad R\varphi = [R']_{M\varphi} \quad$ e $\quad M\varphi = M'$.

Osserviamo che:

a) La condizione (B) è equivalente alla seguente

(B') $\qquad a\varphi \subseteq [R']_{M\varphi} \qquad$ per ogni $\quad a \in R$.

Ciò segue dalla $R\varphi = \bigcup_{a \in R} a\varphi$.

b) Se per ogni $(R, R') \in \rho$ chiamiamo corrispondenti un elemento $a \in R$ ed un elemento $a' \in R'$ quando è $a' \in a\varphi$, allora la (A) equivale ad affermare che la detta corrispondenza è *da tutto* R ad $[R']_{M\varphi}$, mentre la (C) equivale ad affermare che la detta corrispondenza è *da tutto* R *a tutto* $[R']_{M\varphi}$.

c) *Se la* φ *è un'applicazione di* M *in* M′ allora per ogni $a \in \mathrm{R}$ l'insieme $a\varphi$ ha un solo elemento e quindi le condizioni (A) e (B) sono equivalenti, come pure sono equivalenti le condizioni (C) e (D). Pertanto, *se* φ *è un'applicazione di* M *in* M′, *allora i cinque tipi* A, B, C, D, E, *si riducono a tre*: B, D, E. Il tipo B è l'usuale *omomorfismo* fra sistemi relazionali; il tipo E è quello che Pierce (3) chiama epimorfismo ed altri (4) chiamano omomorfismo forte; il tipo D è quello che Gratzer (5), nel caso delle algebre parziali, chiama omomorfismo pieno.

d) *Se la* φ *è un'applicazione di* M *in* M′ *e i sistemi* $(\mathrm{M}, \mathcal{R})$ *ed* $(\mathrm{M}', \mathcal{R}')$ *sono algebre universali*, allora, come è ben noto, da $\mathrm{R}\varphi \subseteq [\mathrm{R}']_{\mathrm{M}\varphi}$ segue $\mathrm{R}\varphi = [\mathrm{R}']_{\mathrm{M}\varphi}$, cioè le condizioni (B) e (D) sono equivalenti e quindi *i tre tipi si riducono a due che sono precisamente l'usuale omomorfismo di un'algebra in un'altra dello stesso tipo, o su tutta un'altra dello stesso tipo*. Questa proprietà è completata dalla seguente.

e) *Supponiamo che i sistemi* $(\mathrm{M}, \mathcal{R})$ *ed* $(\mathrm{M}', \mathcal{R}')$ *siano algebre universali e che ogni elemento* $x \in \mathrm{M}$ *sia il risultato di qualche operazione di* $\mathcal{R}$. *In questa ipotesi ogni corrispondenza omomorfa di tipo* B *rispetto al riferimento normale* ρ, *è un'applicazione di* M *in* M′.

Infatti, siano $x \in \mathrm{M}$, $x' \in \mathrm{M}'$, $x'' \in \mathrm{M}'$ tali che

$$(x, x') \in \varphi \qquad (x, x'') \in \varphi . \tag{1}$$

Per ipotesi esiste $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$ tale che x è l'ultimo elemento di qualche α–sequenza $y \in \mathrm{R}$

$$y = (x_0, x_1, \cdots, x_\gamma, \cdots, x)_{\gamma<\beta} \in \mathrm{R} \qquad (x_\gamma \in \mathrm{M})$$

essendo $\alpha = \beta + 1$ la arità di R.

Consideriamo ora un $\mathrm{R}' \in \mathcal{R}'$ tale che $(\mathrm{R}, \mathrm{R}') \in \rho$. Poiché φ è da tutto M ad M′, per ogni x_γ $(\gamma < \beta)$ possiamo scegliere $x'_\gamma \in \mathrm{M}'$ tale che $(x_\gamma, x'_\gamma) \in \varphi$. Da queste, dalle (1) e dall'ipotesi che φ è omomorfa di tipo B, segue

$$(x'_0, x'_1, \cdots, x'_\gamma, \cdots, x')_{\gamma<\beta} \in y\varphi \subseteq \mathrm{R}' \qquad (x'_0, x'_1, \cdots, x'_\gamma, \cdots, x'')_{\gamma<\beta} \in y\varphi \subseteq \mathrm{R}'$$

da cui, poiché R′ è un'operazione, segue $x' = x''$.

f) Consideriamo ogni coppia $(\mathrm{R}, \mathrm{R}') \in \rho$ come una relazione di arità α uguale alla arità di R e di R′, definita su $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ nel seguente modo:

$$((a_0, a'_0), (a_1, a'_1), \cdots, (a_\gamma, a'_\gamma), \cdots)_{\gamma<\alpha} \in (\mathrm{R}, \mathrm{R}')$$

se e solo se $(a_0, a_1, \cdots, a_\gamma, \cdots)_{\gamma<\alpha} \in \mathrm{R}$ e $(a'_0, a'_1, \cdots, a'_\gamma \cdots)_{\gamma<\alpha} \in \mathrm{R}'$.

(3) Pierce [2], p. 20.
(4) Malcev [3], p. 45; Chang–Keisler [4], p. 242.
(5) Gratzer [5], p. 81.

Otteniamo così un sistema relazionale $(M \times M', \rho)$ che chiameremo *prodotto diretto di* $(M, \mathcal{R})$ *per* $(M', \mathcal{R}')$ *secondo* ρ. Dopo ciò, tenendo presente la definizione di prodotto sottodiretto [6] si vede facilmente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una corrispondenza φ *da tutto* M *a tutto* M′ *sia omomorfa di tipo* C *rispetto al riferimento normale* ρ *è che* φ *sia prodotto sottodiretto di* $(M, \mathcal{R})$ *per* $(M', \mathcal{R}')$ *secondo* ρ.

g) *Supponiamo infine che* $(M, \mathcal{R})$ *ed* $(M', \mathcal{R}')$ *siano algebre*. In questa ipotesi il prodotto diretto $(M \times M', \rho)$ è un'algebra e si ha che:

Se una corrispondenza φ *da tutto* M *ad* M′ *è una sottoalgebra di* $(M \times M', \rho)$ *allora essa è una corrispondenza omomorfa di tipo* A *rispetto al riferimento normale* ρ.

5. *Siano* $(M, \mathcal{R})$ *ed* $(M', \mathcal{R}')$ *sistemi relazionali con* $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{R}'$ *riferibili e sia* φ *una corrispondenza da tutto* M *ad* M′.

a) Affinché φ sia omomorfa di tipo X $(X = A, B, C, D, E)$ rispetto a qualche riferimento normale occorre e basta che: 1) per ogni $R \in \mathcal{R}$ esista $R' \in \mathcal{R}'$ avente la stessa arità di R e tale che la coppia (R, R') soddisfi alla condizione X. 2) Per ogni $R' \in \mathcal{R}$ esista $R \in \mathcal{R}$ avente la stessa arità di R′ e tale che la coppia (R, R') soddisfi alla condizione X.

b) *Supponiamo ora che* φ *sia omomorfa di tipo* X $(X = A, B, C, D, E)$ *rispetto a qualche riferimento normale.*

Indichiamo con $\overline{\rho}_X$ *l'insieme di tutte le coppie* $(R, R') \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}'$ *che soddisfano alla condizione* X. Si ha subito che:

1) $\overline{\rho}_X$ è un riferimento normale rispetto al quale la φ è omomorfa di tipo X, anzi $\overline{\rho}_X$ *è il massimo dei riferimenti normali rispetto ai quali* φ *è omomorfa di tipo* X.

2) $\overline{\rho}_X$ è univocamente determinato da $(M, \mathcal{R})$, $(M', \mathcal{R}')$, φ, e dalla condizione X.

3) I riferimenti normali rispetto ai quali φ è omomorfa di tipo X sono tutti e soli i riferimenti normali ρ per cui si ha $\rho \subseteq \overline{\rho}_X$.

c) Nel seguito *indicheremo con* E l'equivalenza definita su $\mathcal{R}$ nel seguente modo:

$R_1 \equiv R_2\,(E)$ se e solo se R_1 ed R_2 hanno la stessa arità e si ha $R_1\varphi = R_2\varphi$; e *indicheremo con* [R] la classe di E contenente $R \in \mathcal{R}$.

Inoltre *indicheremo con* E′ l'equivalenza definita su $\mathcal{R}'$ nel seguente modo:

$R'_1 \equiv R'_2\,(E')$ se e solo se R'_1 ed R'_2 hanno la stessa arità e si ha $[R'_1]_{M\varphi} = [R'_2]_{M\varphi}$; e *indicheremo con* [R′] la classe di E′ contenente $R' \in \mathcal{R}'$.

Infine, se Y è un insieme, *indicheremo con* $|Y|$ il cardinale di Y.

(6) Pierce [2], p. 42.

6. *Siano* $(M, \mathscr{R})$ *ed* $(M', \mathscr{R}')$ *sistemi relazionali con* $\mathscr{R}$ *ed* $\mathscr{R}'$ *riferibili, e sia* φ *una corrispondenza da tutto* M *ad* M'. *In queste ipotesi si ha:*

a) *Se* φ *è omomorfa di tipo* E *rispetto a qualche riferimento normale, allora essa è omomorfa di tipo* E *rispetto ad un solo riferimento normale, e questo riferimento normale è l'applicazione (di* $\mathscr{R}$ *su tutto* $\mathscr{R}'$*) che si ottiene facendo corrispondere ad ogni* $R \in \mathscr{R}$ *l'elemento* $R\varphi = R' \in \mathscr{R}'$.

Se φ, *oltre che essere omomorfa di tipo* E *rispetto a qualche riferimento normale, è un'applicazione biunivoca (di* M *su tutto* M'*), allora anche il riferimento normale rispetto al quale* φ *è omomorfa di tipo* E *è un'applicazione biunivoca* (7) *(di* $\mathscr{R}$ *su tutto* $\mathscr{R}'$*).*

Infatti, se φ è omomorfa di tipo E rispetto a qualche riferimento normale, allora si ha $M\varphi = M'$, quindi $[R']_{M\varphi} = R'$ per ogni $R' \in \mathscr{R}'$, quindi le coppie $(R, R') \in \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}'$ che soddisfano alla condizione E sono quelle per cui si ha $R\varphi = R'$. Ne segue che il riferimento normale massimo rispetto al quale φ è omomorfa di tipo E è

$$\bar{\rho}_E = \bigcup_{R \in \mathscr{R}} ([R] \times \{R\varphi\}) \tag{2}$$

dove $[R] \times \{R\varphi\}$ indica il prodotto cartesiano della classe [R] di E che contiene $R \in \mathscr{R}$, per l'insieme $\{R\varphi\}$ che ha come unico elemento $R\varphi = R' \in \mathscr{R}'$.

Cioè $\bar{\rho}_E$ è l'applicazione di $\mathscr{R}$ su tutto $\mathscr{R}'$ che si ottiene facendo corrispondere ad ogni $R \in \mathscr{R}$ l'elemento $R\varphi = R' \in \mathscr{R}'$. Da ciò segue che se ρ è un riferimento normale rispetto al quale φ è omomorfa di tipo E, si ha $\rho \subseteq \bar{\rho}_E$, quindi ρ è un'applicazione di $\mathscr{R}$ su tutto $\mathscr{R}'$, quindi è $\rho = \bar{\rho}_E$.

Infine, supponiamo che la φ, oltre che essere omomorfa di tipo E, sia biunivoca. Proviamo che per $R, R_1 \in \mathscr{R}$, da $R\varphi = R_1\varphi$ segue $R = R_1$. Infatti, sia $(a_0, a_1, \cdots) \in R$; si ha $(a_0\varphi, a_1\varphi, \cdots) \in R\varphi = R_1\varphi$, quindi esiste $(b_0, b_1, \cdots) \in R_1$ tale che $a_0\varphi = b_0\varphi$, $a_1\varphi = b_1\varphi, \cdots$. Da queste, poiché φ è biunivoca segue $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \cdots$, quindi $(a_0, a_1, \cdots) = (b_0, b_1, \cdots) \in R_1$. Pertanto si ha $R \subseteq R_1$. Analogamente si vede che è $R_1 \subseteq R$, e quindi si ha $R = R_1$. Da quanto abbiamo provato segue che è $|[R]| = 1$ per ogni $R \in \mathscr{R}$, e quindi per la (2) si ha che la $\bar{\rho}_E$ è biunivoca.

b) *Supponiamo ora che la* φ *sia omomorfa di tipo* D *rispetto a qualche riferimento normale.*

Sia [R] una classe dell'equivalenza E. L'insieme di tutti gli $R' \in \mathscr{R}'$ tali che $[R']_{M\varphi} = R\varphi$ non è vuoto ed è una classe dell'equivalenza E'. Ad ogni classe [R] di E facciamo corrispondere la classe di tutti gli $R' \in \mathscr{R}'$ per cui si ha $[R']_{M\varphi} = R\varphi$. Otteniamo così un'applicazione ϑ dell'insieme delle classi di E *su tutto* l'insieme delle classi di E':

$$[R]\vartheta = [R'] \quad \text{con} \quad R' \in \mathscr{R}' \quad \text{tale che} \quad [R']_{M\varphi} = R\varphi .$$

Si vede subito che *la* ϑ *è biunivoca* e si ha

$$\bar{\rho}_D = \bigcup_{R \in \mathscr{R}} ([R] \times [R]\vartheta) \tag{3}$$

dove $[R] \times [R]\vartheta$ indica il prodotto cartesiano della classe [R] di E per la corrispondente classe $[R]\vartheta$ di E'.

(7) La biunivocità del riferimento normale, nel caso che $(M, \mathscr{R})$ ed $(M', \mathscr{R}')$ sono algebre finitarie col sistema delle operazioni fondamentali coincidente con quello delle operazioni algebriche, trovasi notata in Goetz [1].

Dalla (3) segue che φ è omomorfa di tipo D rispetto ad un solo riferimento normale se e solo se per ogni $R \in \mathscr{R}$ si ha

$$|[R]| = 1 \quad \text{oppure} \quad |[R]\vartheta| = 1 .$$

Infatti, se per ogni $R \in \mathscr{R}$ si ha $|[R]| = 1$ oppure $|[R]\vartheta| = 1$, allora levando da $\bar{\rho}_D$ una qualunque sua coppia $(R, R') \in \bar{\rho}_D$, non si ottiene mai una corrispondenza da tutto $\mathscr{R}$ a tutto $\mathscr{R}'$, e quindi non si ottiene un riferimento normale.

Supponiamo invece che per qualche $R \in \mathscr{R}$ sia $|[R]| \geq 2$ ed $|[R]\vartheta| \geq 2$.

In questa ipotesi possiamo scegliere due elementi distinti in $[R]$, $R \in [R]$ ed $R_1 \in [R]$, e possiamo scegliere due elementi distinti in $[R]\vartheta$, $R' \in [R]\vartheta$ ed $R'_1 \in [R]\vartheta$; e si ha $(R, R') \in \bar{\rho}_D$, $(R_1, R') \in \bar{\rho}_D$, $(R_1, R'_1) \in \bar{\rho}_D$.

Ne segue che levando da $\bar{\rho}_D$ la coppia $(R_1, R') \in \bar{\rho}_D$, si ottiene un riferimento normale ρ rispetto al quale φ è omomorfa di tipo D, e che è distinto da $\bar{\rho}_D$.

Da quanto sopra segue

Se φ è omomorfa di tipo D *rispetto a qualche riferimento normale, allora:*

1) *Facendo corrispondere ad ogni classe* $[R]$ *di* E *la classe* $[R']$ *di* E' *formata dagli* $R' \in \mathscr{R}'$ *per cui si ha* $[R']_{M\varphi} = R\varphi$, *si ottiene una applicazione biunivoca* ϑ *dell'insieme delle classi di* E *su tutto l'insieme delle classi di* E'.

2) *Il riferimento normale massimo* $\bar{\rho}_D$ *rispetto al quale* φ *è omomorfa di tipo* D *è*

$$\bar{\rho}_D = \bigcup_{R \in \mathscr{R}} ([R] \times [R]\vartheta).$$

3) *La* φ *è omomorfa di tipo* D *rispetto ad un solo riferimento normale allora e solo quando per ogni* $R \in \mathscr{R}$ *e per ogni* $R' \in \mathscr{R}'$ *tale che* $[R']_{M\varphi} = R\varphi$, *si ha*

$$|[R]| = 1 \quad \textit{oppure} \quad |[R']| = 1.$$

In particolare:

Se φ è omomorfa di tipo D *rispetto a qualche riferimento normale e se vale una delle seguenti due proprietà:*

1) *La φ è biunivoca; oppure*

2) *Relazioni distinte di* $\mathscr{R}'$ *hanno restrizioni distinte in* $M\varphi$;

allora la φ è omomorfa di tipo D *rispetto ad un solo riferimento normale.*

Infatti, nel primo caso si ha $|[R]| = 1$ per ogni $R \in \mathscr{R}$, e nel secondo caso si ha $|[R']| = 1$ per ogni $R' \in \mathscr{R}'$.

Notiamo inoltre che nel primo caso $\bar{\rho}_D^{-1}$ è un'applicazione di $\mathscr{R}'$ su tutto $\mathscr{R}$, e nel secondo caso $\bar{\rho}_D$ è un'applicazione di $\mathscr{R}$ su tutto $\mathscr{R}'$.

Osserviamo infine che:

Se φ è un'applicazione biunivoca di M *in* M' *omomorfa di tipo* D *rispetto a qualche riferimento normale, e se relazioni distinte di* $\mathscr{R}'$ *hanno restrizioni distinte in* $M\varphi$, *allora la φ è omomorfa di tipo* D *rispetto ad un solo riferimento normale e questo riferimento normale è un'applicazione biunivoca di* $\mathscr{R}$ *su tutto* $\mathscr{R}'$.

c) *Siano* $(M, \mathscr{R})$ *ed* $(M', \mathscr{R}')$ *sistemi relazionali con*

$$M \subseteq M' \qquad \mathscr{R} = \{[R']_M \mid R' \in \mathscr{R}'\}$$

e sia φ una corrispondenza da tutto M *ad* M'. In queste ipotesi l'insieme

$$\rho = \{([R']_M, R') \mid R' \in \mathscr{R}'\}$$

è un riferimento normale di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$, e si ha che:

Se φ *è omomorfa di tipo* D *rispetto al riferimento normale* ρ, *allora relazioni di* $\mathcal{R}'$ *che hanno uguali restrizioni in* M *hanno uguali restrizioni anche in* $M\varphi$. Cioè per ogni $R', R'_1 \in \mathcal{R}'$, da $[R']_M = [R'_1]_M$ segue $[R']_{M\varphi} = [R'_1]_{M\varphi}$.

Infatti, per ogni $R', R'_1 \in \mathcal{R}'$ si ha

$$([R']_M , R') \in \rho \qquad ([R'_1]_M , R'_1) \in \rho$$

da cui, essendo φ omomorfa di tipo D rispetto a ρ, segue

$$[R']_M\,\varphi = [R']_{M\varphi} \qquad [R'_1]_M\,\varphi = [R'_1]_{M\varphi}\,. \tag{4}$$

Se è $[R']_M = [R'_1]_M$, allora è anche $[R']_M\,\varphi = [R'_1]_M\,\varphi$, e quindi per le (4) è $[R']_{M\varphi} = [R'_1]_{M\varphi}$ che è quanto volevasi provare.

Dalla proprietà dimostrata sopra segue in particolare (per $M\varphi = M'$) che:

Se φ *è omomorfa di tipo* E *rispetto al riferimento normale* ρ, *allora relazioni di* $\mathcal{R}'$ *che hanno uguali restrizioni in* M, *sono uguali* (8).

7. *Siano* (M , R) *ed* $(M', \mathcal{R}')$ *sistemi relazionali con* $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{R}'$ *riferibili, e sia* φ *una corrispondenza da tutto* M *ad* M' *omomorfa di tipo* X (X = A , B , C , D , E) *rispetto a qualche riferimento normale. In queste ipotesi si ha*:

Affinché la φ *sia omomorfa di tipo* X *rispetto ad un solo riferimento normale è necessario e sufficiente che gli insiemi* $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, $\bar\rho_X$ *si possano decomporre nel seguente modo*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\,, \quad \textit{con} \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \varnothing\,; \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{R}'_2\,, \quad \textit{con} \quad \mathcal{R}'_1 \cap \mathcal{R}'_2 = \varnothing;$$

$\bar\rho_X = \rho_1 \cup \rho_2$, *con* ρ_1 *applicazione di* $\mathcal{R}_1$ *su tutto* $\mathcal{R}'_1$ *ed* ρ_2^{-1} *applicazione di* $\mathcal{R}'_2$ *su tutto* $\mathcal{R}_2$.

Supponiamo che φ sia omomorfa di tipo X rispetto ad un solo riferimento normale.

Indichiamo con $\mathcal{R}_1$ l'insieme degli $R \in \mathcal{R}$ che sono primi elementi di una sola coppia di $\bar\rho_X$, e indichiamo con $\mathcal{R}_2$ l'insieme degli $R \in \mathcal{R}$ che sono primi elementi di almeno due coppie di $\bar\rho_X$. Indichiamo con ρ_1 l'insieme delle coppie di $\bar\rho_X$ che hanno il primo elemento in $\mathcal{R}_1$ e con ρ_2 l'insieme delle coppie di $\bar\rho_X$ che hanno il primo elemento in $\mathcal{R}_2$. Si ha

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2\,, \quad \text{con} \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \varnothing\,; \qquad \bar\rho_X = \rho_1 \cup \rho_2\,, \quad \text{con} \quad \rho_1 \cap \rho_2 = \varnothing\,.$$

Indichiamo con $\mathcal{R}'_1$ l'insieme dei secondi elementi delle coppie di ρ_1, e con $\mathcal{R}'_2$ l'insieme dei secondi elementi delle coppie di ρ_2. Si ha $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{R}'_2$.

Proviamo che è $\mathcal{R}'_1 \cap \mathcal{R}'_2 = \varnothing$. Infatti sia $R'_1 \in \mathcal{R}'_1 \cap \mathcal{R}'_2$. Da $R'_1 \in \mathcal{R}'_1$ segue che esiste $R_1 \in \mathcal{R}_1$ tale che $(R_1, R'_1) \in \bar\rho_X$. Da $R'_1 \in \mathcal{R}'_2$ segue che esiste $R_2 \in \mathcal{R}_2$ tale che $(R_2, R'_1) \in \bar\rho_X$. Da $R_2 \in \mathcal{R}_2$ segue che esiste $R'_2 \neq R'_1$ e tale che $(R_2, R'_2) \in \bar\rho_X$. Da $(R_1, R'_1) \in \bar\rho_X$, $(R_2, R'_1) \in \bar\rho_X$, $(R_2, R'_2) \in \bar\rho_X$, con $R_1 \neq R_2$ ed $R'_1 \neq R'_2$, segue che se da $\bar\rho_X$ si leva la coppia (R_2, R'_1) si ottiene un riferimento normale ρ, distinto da $\bar\rho_X$, e rispetto al quale φ è

(8) Da questa proprietà, nel caso che $(M', \mathcal{R}')$ è un'algebra $(M, \mathcal{R})$ è una sottoalgebra di $(M', \mathcal{R}')$, e φ è un'applicazione omomorfa di $(M, \mathcal{R})$ su tutta $(M', \mathcal{R}')$, segue subito il seguente risultato di Marczewski [6]:

Se un algebra A *è l'immagine omomorfa di una sua sottoalgebra* B, *allora due operazioni algebriche di* A *che coincidono in* B *coincidono anche in* A.

omomorfa di tipo X. Poiché ciò contraddice con l'ipotesi che φ è omomorfa di tipo X rispetto ad un solo riferimento normale, si ha che è $\mathcal{R}'_1 \cap \mathcal{R}'_2 = \emptyset$.

Osserviamo ora che ρ_1 è per definizione un'applicazione di $\mathcal{R}_1$ su tutto $\mathcal{R}'_1$. La ρ_2 è per definizione una corrispondenza da tutto $\mathcal{R}_2$ a tutto $\mathcal{R}'_2$.

Proviamo che ρ_2^{-1} è un'applicazione. Infatti, siano $(R_2, R'_2) \in \rho_2$ ed $(\bar{R}_2, R'_2) \in \rho_2$, con $R_2 \neq \bar{R}_2$. Poiché $\bar{R}_2 \in \mathcal{R}_2$ si ha che esiste $\bar{R}'_2 \in \mathcal{R}'_2$ tale che $(\bar{R}_2, \bar{R}'_2) \in \rho_2$ ed $R'_2 \neq \bar{R}'_2$. Da $(R_2, R'_2) \in \rho_2$, $(\bar{R}_2, R'_2) \in \rho_2$, $(\bar{R}_2, \bar{R}'_2) \in \rho_2$, con $R_2 \neq \bar{R}_2$ ed $R'_2 \neq \bar{R}'_2$, segue che se da $\bar{\rho}_X$ si leva la coppia $(\bar{R}_2, R'_2)$ si ottiene un riferimento normale, distinto da $\bar{\rho}_X$ e rispetto al quale φ è omomorfa di tipo X. Ciò contraddice con l'ipotesi di unicità, e quindi ρ_2^{-1} è un'applicazione.

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ e $\bar{\rho}_X$ ammettano una decomposizione del tipo di quella descritta nell'enunciato. Levando da $\bar{\rho}_X$ una coppia, qualunque essa sia, non si ottiene mai una corrispondenza da tutto $\mathcal{R}$ a tutto $\mathcal{R}'$. E poiché se ρ è un qualunque riferimento normale rispetto al quale φ è omomorfa di tipo X, si ha $\rho \subseteq \bar{\rho}_X$, ne segue che è necessariamente $\rho = \bar{\rho}_X$ e quindi $\bar{\rho}_X$ è l'unico riferimento normale rispetto al quale φ è omomorfa di tipo X.

8. *Siano* $(M, \mathcal{R})$ *ed* $(M', \mathcal{R}')$ *sistemi relazionali, sia* φ *una corrispondenza da tutto* M *ad* M', *e sia* σ *una corrispondenza da tutto* $\mathcal{R}$ *ad* $\mathcal{R}'$.

Diremo che σ *è regolare* quando da $(R, R') \in \sigma$ segue che R ed R' hanno la stessa arità. Diremo che σ *è completa su* $M\varphi$ quando per ogni $R' \in \mathcal{R}'$ esiste $(R, R'_1) \in \sigma$ con R'_1 avente la stessa arità di R' e tale che $[R']_{M\varphi} = [R'_1]_{M\varphi}$. Diremo che φ *è omomorfa di tipo* X (X = A, B, C, D, E) *rispetto a* σ quando ogni $(R, R') \in \sigma$ soddisfa alla condizione X. Premesso ciò si ha:

a) *Una corrispondenza* φ *da tutto* M *ad* M' *è omomorfa di tipo* X *rispetto a qualche corrispondenza* σ *regolare e completa su* $M\varphi$, *allora e solo quando essa è omomorfa di tipo* X *rispetto a qualche riferimento normale di* $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{R}'$.

Infatti, se φ è omomorfa di tipo X rispetto a qualche riferimento normale di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$, allora φ è omomorfa di tipo X rispetto a qualche corrispondenza regolare e completa su $M\varphi$ perché ogni riferimento normale di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ è una corrispondenza da tutto $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$, regolare e completa su $M\varphi$.

Viceversa, supponiamo che φ sia omomorfa di tipo X rispetto a qualche corrispondenza σ da tutto $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$ regolare e completa su $M\varphi$. Poiché σ è da tutto $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$, per ogni $R \in \mathcal{R}$ esiste $R' \in \mathcal{R}'$ tale che $(R, R') \in \sigma$; poiché σ è regolare, R' ha la stessa arità di R; e poiché φ è omomorfa di tipo X rispetto a σ si ha che la coppia (R, R') soddisfa alla condizione X.

Sia ora $R' \in \mathcal{R}'$. Poiché σ è completa su $M\varphi$, esiste $(R, R'_1) \in \sigma$ con R'_1 avente la stessa arità di R' e tale che $[R'_1]_{M\varphi} = [R']_{M\varphi}$. Da ciò segue che R ha la stessa arità di R' e che la coppia (R, R') soddisfa alla condizione X.

Per quanto sopra si ha (n. 3 e n. 5 a) che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ sono riferibili e φ è omomorfa di tipo X rispetto a qualche riferimento normale di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$.

b) *Se una corrispondenza* φ *da tutto* M *ad* M' *è omomorfa di tipo* X *rispetto a qualche corrispondenza* σ *regolare e completa su* $M\varphi$, *allora essa è omomorfa di tipo* X *rispetto ad una sola corrispondenza regolare e completa su* $M\varphi$, *se e solo se*:

1) *Relazioni distinte di* $\mathcal{R}'$ *hanno restrizioni distinte in* $M\varphi$.

2) *Gli insiemi* $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, $\bar{\rho}_X$, *si possono decomporre come nel teorema del n.* 7.

Supponiamo che φ sia omomorfa di tipo X rispetto a qualche corrispondenza σ regolare e completa su $M\varphi$. Proviamo che se σ è l'unica corrispondenza regolare e completa rispetto alla quale φ è omomorfa di tipo X, allora si ha $|[R']| = 1$ per ogni $R' \in \mathcal{R}'$, e quindi σ è su tutto $\mathcal{R}'$, e quindi σ è un riferimento normale di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$.

Infatti, sia $R' \in \mathcal{R}'$ tale che $|[R']| \geq 2$. Poiché σ è completa esiste $(R, R_1') \in \sigma$ con R_1' avente la stessa arità di R' e tale che $[R_1']_{M\varphi} = [R']_{M\varphi}$. Poiché φ è omomorfa di tipo X rispetto a σ si ha che la coppia $(R, R_1') \in \sigma$ soddisfa alla condizione X e quindi alla stessa condizione X soddisfa anche ogni coppia (R, R_2') con R_2' avente la stessa arità di R_1' e tale che $[R_2']_{M\varphi} = [R_1']_{M\varphi}$. Da $[R']_{M\varphi} = [R_1']_{M\varphi} = [R_2']_{M\varphi}$ segue $[R'] = [R_1'] = [R_2']$. E poiché $|[R']| \geq 2$, possiamo scegliere $R_2' \neq R_1'$. Dopo ciò, osserviamo che se da σ leviamo la coppia $(R, R_1') \in \sigma$ e aggiungiamo la (R, R_2'), se non è già in σ, otteniamo una corrispondenza σ_1 da tutto $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$ che è regolare e completa su $M\varphi$, è tale che rispetto ad essa la φ è omomorfa di tipo X, ed è distinta da σ, contro l'ipotesi di unicità di σ. Pertanto si ha $|[R']| = 1$ per ogni $R' \in \mathcal{R}'$, cioè vale la 1). Inoltre, dalla 1) segue che σ è su tutto $\mathcal{R}'$, quindi σ è un riferimento normale, e da ciò, per l'ipotesi di unicità, segue la 2).

Viceversa, supponiamo che valgano 1) e 2). Da 1) segue che ogni corrispondenza regolare e completa su $M\varphi$ è un riferimento normale, e dalla 2) per il Teorema del n. 7 segue l'unicità di σ.

c) *Una corrispondenza φ da tutto M ad M' è omomorfa di tipo D rispetto a qualche applicazione di $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$ regolare e completa su $M\varphi$, allora e solo quando essa è omomorfa di tipo D rispetto a qualche riferimento normale di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$.*

d) *Se una corrispondenza φ da tutto M ad M' è omomorfa di tipo D rispetto a qualche applicazione di $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$ regolare e completa su $M\varphi$, allora essa è omomorfa di tipo D rispetto ad una sola di tali applicazioni se e solo se relazioni distinte di $\mathcal{R}'$ hanno restrizioni distinte in $M\varphi$; cioè se e solo se si ha $|[R']| = 1$ per ogni $R' \in \mathcal{R}'$.*

La c) e la d) seguono subito dalla $\bar{\rho}_D = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} ([R] \times [R]\vartheta)$ del n. 6 b).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. GOETZ (1966) – *On weak isomorphisms and weak homomorphisms of abstract algebras*, «Colloq. Math.», *14*, 163–167.

[2] R. S. PIERCE (1968) – *Introduction to the Theory of Abstract Algebras*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[3] A. I. MAL'CEV (1973) – *Algebraic Systems*, Springer, Berlin.

[4] C. C. CHANG e H. J. KEISLER (1973) – *Model Theory*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam.

[5] G. GRÄTZER (1968) – *Universal algebra*, D. Van Nostrand Co., Princeton.

[6] E. MARCZEWSKI (1961) – *Indipendence and homomorphisms in abstract algebras*, « Fund. Math. », *50*, 45–61.