
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

**Su nuovi casi di integrabilità per separazione di
variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi.
Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 57 (1974), n.5, p. 391–398.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_391_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica analitica. — *Su nuovi casi di integrabilità per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi.* Nota I (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we complete a research effected in a Memoir of the Academy of Sciences of Turin and in a Note of the Venetian Institute in the year 1937, concerning the determination of all types of kinetic energy and potential of forces which make integrable by separation of variables the corresponding dynamical equation of Hamilton-Jacobi. We show that this equation is in effect soluble by separation of variables and we assign the corresponding complete integrals in the general case.

1. La questione di determinare tutti i tipi di problemi dinamici con vincoli indipendenti dal tempo e soggetti a forze conservative, per i quali la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi sia integrabile per separazione di variabili, fu posta come si sa da Stäckel nel 1891 ⁽¹⁾ che riuscì a determinare il caso di integrabilità che porta il suo nome, nel quale l'energia cinetica ha forma ortogonale, mentre un caso più particolare di integrabilità, che rientra in quello di Stäckel, era stato in precedenza segnalato da Liouville.

Lo stesso Stäckel assegnò anche in modo esplicito le condizioni per la possibilità del problema nel caso generale. Queste condizioni furono successivamente ricavate, sotto altra forma, da Levi-Civita in una lettera allo stesso Stäckel pubblicata nei «*Mathematische Annalen*» ⁽²⁾.

Ora la questione di determinare un così detto integrale completo dell'equazione alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi col criterio della separazione di variabili si presenta spontaneo in molti problemi dinamici. D'altra parte i casi più notevoli in cui si riesce effettivamente ad assegnare un integrale completo di detta equazione sono appunto quelli in cui è applicabile il criterio della separazione delle variabili. Ma questa possibilità si riscontra evidentemente soltanto in corrispondenza di forme particolari dell'energia cinetica e del potenziale delle forze. Da ciò viene l'importanza di determinare tutte le forme per cui è applicabile il detto criterio.

In merito a questa questione il Levi-Civita, nella lettera allo Stäckel, dopo aver stabilito le condizioni per la possibilità di risoluzione del problema, assegnava una classificazione dei casi in cui si presenta questa possibilità, e risolveva il problema in un caso particolare nel quale le forze agenti sono nulle e la varietà metrica e euclidea.

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1974.

(1) P. STÄCKEL, *Habilitationsschrift* (Hale), 1891. IDEM, «*Mathematische Annalen*», 42 (1893), pp. 537-563.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, «*Math. Ann.*», 59 (1904), pp. 383-397.

Successivamente il Dall'Acqua ⁽³⁾ compieva un ulteriore passo dando la risoluzione completa del problema nel caso di tre variabili.

In una Nota posteriore il Burgatti ⁽⁴⁾ affrontava di nuovo il problema, assegnando in modo intuitivo, nel caso generale di variabili, $n - 1$ nuovi tipi di equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili, senza però dimostrare se quei tipi fossero i più generali.

Più tardi, in una Memoria dell'Accademia delle Scienze di Torino del 1937 ⁽⁵⁾ e in una Nota dell'Istituto Veneto ⁽⁶⁾, utilizzando la classificazione di Levi-Civita veniva da me data la risoluzione generale e sistematica del problema mediante un algoritmo più sintetico e dopo aver messo in luce alcune riposte proprietà geometriche della varietà metrica vincolare.

In questi lavori assegnavo, nel caso generale di n variabili, l'espressione esplicita di tutti i tipi di energia cinetica e di potenziali delle forze per cui le corrispondenti equazioni di Hamilton-Jacobi erano integrabili per separazione di variabili, ma non mi occupavo di determinare i relativi integrali completi.

Nelle Note, che ho ora l'onore di presentare all'Accademia, dimostrò come i sistemi dinamici caratterizzati in quei lavori si integrano effettivamente col criterio della separazione delle variabili e assegno i corrispondenti integrali completi, contenenti cioè tante costanti arbitrarie *essenziali* quante sono le variabili incognite. Nella prima Nota considero il caso generale della classificazione a cui ho accennato, dando due distinte soluzioni del problema. In una seconda Nota vengono esaminati i casi estremi che al limite danno luogo alla soluzione di Levi-Civita e a quella di Stäckel.

2. Con riferimento a un sistema dinamico con n gradi di libertà, con vincoli indipendenti dal tempo, la cui configurazione in ogni istante sia individuata dalla conoscenza dei valori di n parametri lagrangiani $x_1, x_2, \dots, x_n$, sia

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n a_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

la sua energia cinetica ed $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il potenziale delle forze agenti su di esso.

La corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi è, come si sa,

$$(2) \quad (T) - U \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n a^{ij} p_i p_j - U = h,$$

(3) F. A. DALL'ACQUA, *Sulla integrazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, «Math. Ann.», 56 (1908), p. 398.

(4) P. BURGATTI, *Determinazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili*, «Rend. R. Accad. Lincei», ser. V, 20 (1931), pp. 108-111.

(5) C. AGOSTINELLI, *Sopra l'integrazione per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi*, «Memorie R. Accad. delle Scienze di Torino», ser. II, 59, Parte I (1937), pp. 3-54. Questa Memoria sarà indicata in seguito con C.A.

(6) IDEM, *Sulle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione di variabili*, «Atti R. Istituto Veneto», 96, (1936-37), Parte II, pp. 151-161.

dove a^{ij} è l'elemento reciproco di a_{ij} nel determinante formato con questi termini; le $p_i = \partial T / \partial \dot{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), sono i *momenti*, al cui posto vanno messe le derivate parziali $\partial W / \partial x_i$ di una funzione incognita $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$; h infine è la costante (arbitraria) dell'energia.

Ora, nel caso generale, affinché l'equazione (2) sia integrabile per separazione di variabili, i coefficienti della forza viva $\mathbf{T}$ devono necessariamente verificare le condizioni (cfr. C. A., *Introduzione*, nn. 4).

$$(3) \quad \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{per } r, s \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{ij} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} = 0, \quad \sum_1^n a^{il} \frac{\partial a_{rl}}{\partial x_j} - a^{ij} \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_j} = 0 \\ \sum_1^n a^{il} \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} a^{ij} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_j} = 0, \quad (r, s, j \neq i; r, s \neq j; i = k+1, \dots, n), \end{array} \right.$$

con $1 < k < n-1$.

In questo caso l'analisi dettagliata del problema ha portato a riconoscere che le varietà $W_k(x_{k+1} = \text{cost.}, \dots, x_n = \text{cost.})$ subordinate nella varietà metrica V_n , il cui elemento lineare è definito dalla

$$ds^2 = 2T dt^2 = \sum_1^n a_{ij} dx_i dx_j,$$

sono applicabili su un S_k euclideo.

Sussistono in tal caso due soluzioni del problema

3. Prima soluzione.

In una prima soluzione i coefficienti della forza viva $\mathbf{T}$ sono dati da (C. A., Parte II, § 8, n. 17 (85))

$$(5) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= H \sum_1^k \frac{X_i^{(s)} X_j^{(s)}}{\sum_{k+1}^n K_t^{(s)}(x_t)}, & (i, j = 1, 2, \dots, n; j \neq i), \\ a_{ii} &= H \sum_1^k \frac{[X_i^{(s)}]^2}{\sum_{k+1}^n K_t^{(s)}(x_t)}, & (i = 1, 2, \dots, k), \\ a_{ii} &= H \left\{ \psi_i(x_i) + \sum_1^k \frac{[X_i^{(s)}]^2}{\sum_{k+1}^n K_t^{(s)}(x_t)} \right\}, & (i = k+1, \dots, n). \end{aligned}$$

dove, le $X_i^{(s)}, \psi_i$ sono funzioni del solo parametro x_i , ed è inoltre

$$H = \sum_{k+1}^n H_t(x_t).$$

Ponendo

$$(12) \quad p_i = \sum_1^k \alpha_s X_i^{(s)}(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

dove le α_s ($s = 1, 2, \dots, k$) sono costanti arbitrarie, la (11), per note proprietà dei determinanti, dopo aver moltiplicato ambo i membri per $H = \sum_{k+1}^n H_i(x_i)$, e cambiato opportunamente gli indici, divenuta

$$(13) \quad \sum_{k+1}^n \left\{ \frac{1}{2} \sum_1^k \alpha_s^2 K_i^{(s)}(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{rs} \alpha_r \alpha_s \frac{X_i^{(r)} X_i^{(s)}}{\psi_i} - \right. \\ \left. - \frac{p_i}{\psi_i} \sum_1^k \alpha_s X_i^{(s)} + \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{\psi_i} - U_i(x_i) - h H_i(x_i) \right\} = 0.$$

Questa dovrà risultare una identità, e poiché la quantità racchiusa tra graffe dipende dal solo parametro x_i , dovremo avere

$$(14) \quad \frac{p_i^2}{2\psi_i} - \frac{p_i}{\psi_i} \sum_1^k \alpha_s X_i^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{rs} \alpha_r \alpha_s \frac{X_i^{(r)} X_i^{(s)}}{\psi_i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_1^k \alpha_s^2 K_i^{(s)}(x_i) - U_i(x_i) - h H_i(x_i) = \beta_i, \quad (i = k+1, \dots, n),$$

dove le β_i sono nuove costanti arbitrarie con

$$\beta_{k+1} + \beta_{k+2} + \dots + \beta_n = 0.$$

Le (12) e (14) danno la prima soluzione richiesta. Le (12), che costituiscono k integrali primi lineari nei momenti, forniscono senz'altro le $\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{dW_i}{dx_i}$ in funzione di x_i , per $i = 1, 2, \dots, k$, e quindi

$$(15) \quad W_i(x_i) = \sum_1^k \alpha_s \int X_i^{(s)}(x_i) dx_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Le stesse (12), risolte rispetto alle costanti arbitrarie α_s , porgono

$$(12') \quad \sum_1^k \frac{B_{is}}{B} p_i = \alpha_s, \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Le (14) invece costituiscono $n - k$ integrali primi quadratici sui momenti. Risolvendole rispetto a p_i e osservando che

$$\sum_{rs} \alpha_r \alpha_s X_i^{(r)} X_i^{(s)} = \left[\sum_1^k \alpha_s X_i^{(s)} \right]^2,$$

si ottiene

$$p_i = \frac{dW_i}{dx_i} = \sum_1^k \alpha_s X_i^{(s)} + \sqrt{2\psi_i \left(U_i + hH_i + \beta_i - \frac{1}{2} \sum_1^k \alpha_s^2 K_i^{(s)} \right)},$$

$$(i = k+1, \dots, n),$$

da cui segue:

$$(16) \quad W_i(x_i) = \sum_1^k \alpha_s \int X_i^{(s)} dx_i + \int \sqrt{2\psi_i \left(U_i + hH_i + \beta_i - \frac{1}{2} \sum_1^k \alpha_s^2 K_i^{(s)} \right)} dx_i,$$

$$(i = k+1, \dots, n).$$

Sommando le (15) e (16) si ha la soluzione richiesta

$$W = \sum_1^k W_i(x_i) + \sum_{k+1}^n W_i(x_i),$$

che costituisce un integrale completo dell'equazione (10), involgente in modo essenziale le n costanti arbitraria $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_{n-1}; h$.

4. Seconda soluzione.

Nella seconda soluzione i coefficienti della forza viva $\mathbf{T}$ sono dati da

$$(17) \quad a_{ij} = \sum_1^k X_i^{(s)}(x_i) X_j^{(s)}(x_j) / \varphi^{ns}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; j \neq i),$$

$$a_{ii} = \sum_1^k [X_i^{(s)}(x_i)]^2 / \varphi^{ns}, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

$$a_{ii} = 1/\varphi^{ni} + \sum_1^k [X_i^{(s)}(x_i)]^2 / \varphi^{ns}, \quad (i = k+1, \dots, n),$$

i cui elementi reciproci sono

$$(18) \quad a^{ij} = \sum_1^k \frac{B_{is} B_{js}}{B^2} \varphi^{ns} + \sum_1^k \frac{B_{is}}{B} \sum_{k+1}^n \sum_1^k \frac{B_{jr}}{B} X_l^{(r)} X_l^{(s)} \varphi^{nl},$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, k),$$

$$a^{ij} = -\varphi^{ni} \sum_1^k X_i^{(s)} \frac{B_{js}}{B}, \quad (i = k+1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k),$$

$$a^{ii} = \varphi^{ni}, \quad (i = k+1, \dots, n) \quad ; \quad a^{ij} = 0, \quad (i, j = k+1, \dots, n; j \neq i),$$

dove $\mathbf{B}$ e le $\mathbf{B}_{is}$ sono le stesse quantità della prima soluzione, mentre φ^{ni} è l'elemento reciproco di c_{ni} ($i = 1, 2, \dots, k$), oppure di $\varphi_{ni}(x_i)$ ($i = k+1, \dots, n$)

Avendo riguardo alle proprietà dei determinanti la (23') si soddisfa identicamente ponendo

$$\Phi_i = h\varphi_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \varphi_{ji}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

essendo le β_j costanti arbitrarie.

Per le (24) e (25), poiché per $i = 1, 2, \dots, k$ è $\varphi_{ni} = c_{ni}$, e $\varphi_{ji} = c_{ji}$, avremo

$$(26) \quad \frac{1}{2} (\alpha_i^2 - 2b_i) = hc_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j c_{ji}, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, k,$$

$$(27) \quad \frac{1}{2} \left(p_i - \sum_{s=1}^k \alpha_s X_i^{(s)} \right)^2 - U_i = h\varphi_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \varphi_{ji}, \quad \text{per } i = k+1, \dots, n.$$

La (26) definisce le costanti α_i ($i = 1, 2, \dots, k$) in funzione delle costanti del problema b_i e c_{ji} , e delle n costanti arbitrarie $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, h$, cioè

$$(28) \quad \alpha_i^2 = 2 \left(b_i + hc_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j c_{ji} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Le equazioni (22) costituiscono k integrali lineari nei momenti $p_1, p_2, \dots, p_k$ e da esse si ricava

$$(29) \quad W_i(x_i) = \sum_{s=1}^k \alpha_s \int X_i^{(s)}(x_i) \alpha x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Le (27) sono invece $n - k$ integrali quadratici negli ulteriori momenti $p_{k+1}, \dots, p_n$. Risolvendole rispetto alle $p_i = dW_i/dx_i$ ($i = k+1, \dots, n$), si deduce

$$(30) \quad W_i(x_i) = \sum_{s=1}^k \alpha_s \int X_i^{(s)}(x_i) dx_i + \int \sqrt{2 \left(U_i + h\varphi_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \varphi_{ji} \right)} dx_i, \\ (i = k+1, \dots, n).$$

La somma delle (29) e (30) dà la seconda soluzione richiesta $W = \sum_{i=1}^n W_i(x_i)$, involgente le n costanti arbitrarie $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, h$, mentre le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono date dalle (28).

Questa seconda soluzione dipende dalle nk funzioni arbitrarie $X_i^{(s)}(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, k$) e dalle $n(n - k)$ funzioni φ_{ji} ($j = 1, 2, \dots, n; i = k+1, \dots, n$), cioè in totale da n^2 funzioni arbitrarie che intervengono nell'espressione della forza viva.