Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Mazzocca

Caratterizzazione dei sistemi rigati isomorfi ad una quadrica ellittica dello $S_{5,q}$, con q dispari,

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.5, p. 360–368.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_360_0>

Geometrie finite. — *Caratterizzazione dei sistemi rigati isomorfi ad una quadrica ellittica dello* $S_{5,q}$, *con* q *dispari*. Nota di FRANCESCO MAZZOCCA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper it is shown that a ruled system of the second kind (cf. [5], [10], [12]), satisfying suitable graphic and arithmetical conditions, is isomorphic to an elliptic quadric of $S_{5,q}$ (with odd q).

PREMESSA

Un *sistema rigato* o *quadragono di Tits non degenere* è uno spazio geometrico (S , R) (cfr. [9], Cap. I) tale che, detti *punti* gli elementi di S e *rette* quelli di R, verifichi i seguenti assiomi (cfr. [10], [12], [15]):

a) *due rette distinte hanno al più un punto in comune*;

b) *se* P *è un punto ed* s *una retta, cui* P *non appartiene, esiste un'unica retta* t *incidente* s *e includente* P;

c) *se* P *e* Q *sono due punti distinti appartenenti ad una stessa retta, esiste almeno un punto* T *tale che ogni retta passante per esso non contenga né* P *né* Q;

d) *esiste almeno un punto di* S *appartenente a tre rette distinte*.

In un sistema rigato (S , R) dicesi *fascio di rette* di centro un punto P, e lo s'indica con F_P, l'insieme delle rette contenenti P; inoltre, l'unione delle rette di F_P prende il nome di *blocco degenere* di polo P e lo si denota con $t(P)$. Si prova che le rette di (S , R) sono equipotenti e che tali sono anche i fasci di rette (cfr. [10], n. 3, [12], n. 3). Due punti distinti P e Q si dicono *dipendenti*) in simboli $P \sim Q$) se appartengono ad una stessa retta, che si denota con (P , Q); nel caso contrario si dice che P e Q sono *indipendenti* ($P \nsim Q$). L'intersezione di due blocchi degeneri con poli indipendenti è un insieme di punti, a due a due indipendenti, che prende il nome di *linea* (cfr. [10], n. 3, [12], n. 5). Se per ogni linea di (S , R) esistono soltanto due blocchi degeneri che la contengono, i poli di tali blocchi si dicono *punti base* della linea e il sistema si dice di *seconda specie*. Un *isomorfismo* tra due sistemi rigati (S , R) ed (S′ , R′) è una biezione $f : S \to S'$ che muta rette di S in rette di S′ e tale che $f^{-1} : S' \to S$ muta rette di S′ in rette di S. Per quanto riguarda ulteriori proprietà dei sistemi rigati si rimanda a [4], [5], [6], [10], [11], [12]. Avvertiamo, inoltre, che nel seguito considereremo esclusivamente sistemi rigati finiti e denoteremo costantemente con r la cardinalità di una retta e con n quella di un fascio di rette.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1974.

In questa Nota si dà una caratterizzazione aritmetico–grafica dei sistemi rigati di seconda specie isomorfi ad una quadrica ellittica dello $S_{5,q}$. Nel n. 1 vengono studiati i sistemi rigati di seconda specie verificanti la *condizione* U, cioè tali che *due linee distinte incluse in uno stesso blocco degenere, che hanno più di un punto in comune, ne hanno esattamente* r. L'insieme di questi r punti prende il nome di *arco* e un sistema rigato verificante la condizione U si dirà *U–regolare* se *per tre punti a due a due indipendenti di un blocco degenere passa un unico arco incluso in esso.* Nell'ipotesi che (S , R) sia U–regolare faremo vedere che risulta $n = (r - 1)^2 + 1$ e proveremo, insieme ad altre proprietà aritmetiche e grafiche, che condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi rigati U–regolari siano isomorfi è che esistano due blocchi degeneri (l'uno del primo sistema, l'altro del secondo) che risultano isomorfi rispetto alle strutture geometriche indotte in essi dalle loro rette e dalle loro linee. Nel n. 2 mostreremo che, se $t(V)$ è un blocco degenere e A un punto di $t(V) - \{V\}$, l'insieme $t(V) - (A, V)$ può in modo opportuno strutturarsi a spazio affine di dimensione tre. Nel n. 3, infine, proveremo che *un sistema rigato di seconda specie U–regolare, con* $q = r - 1$ *dispari, è isomorfo al sistema rigato associato ad una quadrica ellittica dello* $S_{5,q}$.

1. SISTEMI RIGATI DI SECONDA SPECIE U–REGOLARI

Sia (S , R) un sistema rigato finito di seconda specie, r il numero dei punti di una retta ed n il numero delle rette di un fascio. Supponiamo che (S , R) verifichi la seguente condizione:

U. – *Due linee distinte incluse in uno stesso blocco degenere, che hanno più di un punto in comune, ne hanno esattamente* r.

In un sistema rigato verificante la condizione U diremo *arco* l'intersezione di due linee distinte incluse in uno stesso blocco ed aventi più di un punto in comune. È evidente che ogni arco è costituito da r punti a due a due indipendenti. Se λ è un arco di un blocco degenere $t(V)$, si dirà sottoblocco di $t(V)$ generato da λ, e si denoterà con $t(V, \lambda)$, l'unione delle rette di F_V che sono ad intersezione non vuota con λ.

Proviamo che:

I) *Se* (S , R) *verifica la condizione* U, *risulta* $n > r$.

Dimostrazione. Osserviamo che è certamente $r \leq n$, in quanto ogni linea consta di n punti (cfr. [10], n. 3, [12], n. 5). Supponiamo quindi che sia $r = n$ e diciamo A e B due punti indipendenti di un blocco degenere $t(V)$. Per A e B passano $n - 1$ linee distinte incluse in $t(V)$ (cfr. [5], n. 2, Prop. IX). Tali linee, essendo $r = n$ e valendo la condizione U, saranno tutte coincidenti, quindi si avrà $n - 1 = r - 1 = 1$. Ciò è assurdo, essendo $r \geq 3$ e $n \geq 3$ (cfr. [10], n. 3, [11], n. 3).

Diremo che un sistema rigato di seconda specie verificante la condizione U è U–*regolare* se vale la seguente condizione:

U_{reg} – *Per tre punti a due a due indipendenti di un blocco degenere passa un unico arco incluso in esso.*

Dalla U_{reg} segue immediatamente che:

II) *Sia* (S , R) *un sistema rigato* U–*regolare. Se tre linee distinte* l, l', l'', *di un blocco degenere* $t(V)$ *hanno tre punti distinti in comune, si ha* $|l \cap l' \cap l''| = r$ *e cioè* $l \cap l' = l' \cap l'' = l'' \cap l = l \cap l' \cap l''$.

Prima di iniziare lo studio dei sistemi rigati U–regolari, proviamo la seguente proposizione di carattere generale.

III) *Sia* (S , R) *un sistema rigato di seconda specie,* $t(V)$ *il blocco degenere di polo* V, A *un punto di* $t(V)$ *distinto da* V *ed* s *una retta per* A *non inclusa in* $t(V)$. *Se* P *e* Q *sono due punti distinti di* s *e distinti da* A, *le linee* $l = t(P) \cap t(V)$ *e* $m = t(Q) \cap t(V)$ *sono incluse in* $t(V)$ *e hanno il solo punto* A *in comune. Ne segue anche che le linee di* $t(V)$ *aventi uno dei punti base su* s, *private del punto* A, *costituiscono una partizione di* $t(V) - (A , V)$.

Dimostrazione. È evidente che l ed m sono incluse in $t(V)$ ed hanno A in comune. Se esistesse un punto $B \neq A$ comune ad l e m, per B passerebbero due rette distinte incidenti s e ciò è assurdo.

D'ora in avanti considereremo esclusivamente sistemi rigati U–regolari e porremo $r = q + 1$. Proviamo che:

IV) *Per tre punti* A , B , C *a due a due indipendenti di un blocco degenere* $t(V)$ *passano esattamente* $r - 1$ *linee distinte incluse in esso. Per due punti distinti* A *e* B *di una linea* l *passano esattamente* r *archi distinti inclusi in* l. *Infine risulta*:

$$n = (r - 1)^2 + 1 = q^2 + 1 .$$

Dimostrazione. Supponiamo che per A, B, C passino h linee distinte di $t(V)$ e siano $l_1, l_2, \cdots, l_h$. Tali linee, per la Prop. II, s'intersecano in un arco μ e quindi, per la U, una retta s di $t(V)$ ad intersezione vuota con μ (certamente esistente essendo $r < n$, cfr. Prop. I) interseca $\bigcup_{i=1}^{h} l_i$ esattamente in h punti distinti, onde risulta $r - 1 \geq h$.

Sia ora l una linea per A e B inclusa in $t(V)$ e C_1 un punto di l distinto da A e B. Per A, B e C_1 passa un unico arco λ_1 che risulta propriamente incluso in l essendo $n > r$ (cfr. Prop. I). Detto C_2 un punto di $l - \lambda_1$, l'arco λ_2 per A, B e C_2 ha in comune con λ_1 solo i punti A e B ed è incluso in l. Se $l \neq \lambda_1 \cup \lambda_2$ esiste un punto $C_3 \in l - \{\lambda_1 \cup \lambda_2\}$. L'arco λ_3 per A, B e C_3 è incluso in l ed ha in comune con λ_1 e λ_2 solo i punti A e B. Mediante un numero finito di tali argomentazioni si prova che:

$$n = k(r - 2) + 2 .$$

Detto, poi, h il numero delle linee distinte di t(V) passanti per tre punti a due a due indipendenti e ricordando che per due punti indipendenti di t(V) passano $n-1$ linee distinte incluse in esso (cfr. [5] n. 2, Prop. IX), deve aversi:

$$n-1=h(r-1),$$

con $1<h\leq r-1$ per quanto abbiamo premesso. L'equazione

$$h(r-1)-1=k(r-2)$$

con la condizione $1<h\leq r-1$ ammette come unica coppia di soluzioni intere

$$h=r-1 \qquad \text{e} \qquad k=r,$$

da cui segue:

$$n=r(r-2)+2=(r-1)^2+1=q^2+1\,.$$

L'asserto è così completamente provato.

V) *Se l ed m sono due linee distinte di un blocco degenere t(V) aventi in comune il solo punto* A, *i punti base di tali linee*, P *e* Q, *distinti da* V *sono allineati su una retta passante per* A.

Dimostrazione. Sia per assurdo $\boldsymbol{s}=(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{P})\neq\boldsymbol{t}=(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{Q})$. Le q linee aventi per punti base V e un punto variabile su $\boldsymbol{s}-\{\mathrm{A}\}$ hanno il solo punto A in comune e se private di esso costituiscono una partizione di $t(\mathrm{V})-(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{V})$ (cfr. Prop. III). Se una di tali linee ha in comune con m qualche punto distinto da A, per la U, ne ha esattamente q. Sia p il numero delle linee suddette che incontrano m in q punti distinti da A. Tra queste linee non vi è l, quindi è $p<q$. D'altra parte, per la seconda parte della Prop. III, $pq+1$ deve coincidere col numero dei punti di m, cioè deve essere $p=q$. L'assurdo cui siamo giunti prova l'asserto.

VI) *Condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi rigati* U*-regolari* (S , R) *e* (S$'$, R$'$) *siano isomorfi è che esistano due blocchi degeneri* t(V) *e* t(V$'$) (*uno del primo sistema, l'altro del secondo*) *che risultino isomorfi rispetto alle strutture geometriche indotte in essi dalle loro rette e dalle loro linee.*

Dimostrazione. Sia f un isomorfismo tra t(V) e t(V$'$). Indichiamo con $\tilde{f}$ l'applicazione tra S ed S$'$ che coincide con f nei punti di t(V) e che opera sui rimanenti punti di S nel modo seguente: se P è un punto di S indipendente da V, la linea $l=t(\mathrm{P})\cap t(\mathrm{V})$ è inclusa in t(V); detta l' la corrispondente in f di l, sia P$'$ il punto base di l' distinto da V$'$, si porrà allora per definizione $\mathrm{P}'=\tilde{f}(\mathrm{P})$. L'applicazione $\tilde{f}$ è evidentemente biunivoca e muta rette in rette. Infatti se $\boldsymbol{t}$ è una retta di (S , R) non appartenente a $\mathrm{F_V}$, essa interseca t(V) in un punto $\mathrm{A}\neq\mathrm{V}$. I punti di $\boldsymbol{t}-\{\mathrm{A}\}$ sono punti base di q linee incluse in t(V), passanti per A e aventi a due a due il solo punto A in comune (cfr. Prop. III). Le $\boldsymbol{q}$ linee che ad esse corrispondono in f, essendo f biunivoca, avranno a due a due il solo punto $A' = f(A)$ in comune. Ne segue che (cfr. Prop. V) l'insieme dei loro punti base distinti da V, a cui si aggreghi A', costituisce una retta $\boldsymbol{t}'$ passante per A' ed è evidentemente $\boldsymbol{t}' = \tilde{f}(\boldsymbol{t})$. Con ragionamento analogo si prova che $\tilde{f}^{-1}$ muta anch'essa rette in rette, cioè $\tilde{f}$ risulta un isomorfismo tra (S, R) e (S', R').

VII) *Sia* λ *un arco di un blocco degenere* $t(V)$ *e* $t(V, \lambda)$ *il sottoblocco di* $t(V)$ *generato da* λ. *Se* A, B, C *sono tre punti a due a due indipendenti di* $t(V, \lambda)$, *l'arco* μ *passante per* A, B *e* C *è tutto incluso in* $t(V, \lambda)$, *cioè si ha* $t(V, \lambda) = t(V, \mu)$.

Dimostrazione. Per $r = 3$ l'asserto è ovvio, supponiamo quindi $r > 3$. Esaminiamo il caso in cui $A, B \in \lambda, C \in t(V, \lambda) - \lambda$ e supponiamo per assurdo che l'arco μ per A, B, C non sia contenuto in $t(V, \lambda)$. Ciò significa che le q linee di $t(V)$ passanti per A, B e C (cfr. prof. IV) hanno in comune un punto $T \notin t(V, \lambda)$. Tra le q linee passanti per λ ve ne sarà una passante per T (cfr. Prop. IV). Tale linea avrà in comune con le linee per A, B e C tre punti distinti, dati da A, B e T, quindi per la Prop. II conterrà C, il che è assurdo in quanto $C \notin \lambda$. Supponiamo, ora, $A \in \lambda$ e $B, C \in t(V, \lambda) - \lambda$ e diciamo H un punto di λ indipendente da A, B e C. L'arco per A, B, C, quello per A, C, H e λ si trovano a due a due nelle condizioni del caso precedentemente esaminato, quindi sono contenuti in uno stesso sottoblocco. Con procedimento analogo si prova la proposizione nel caso in cui $A, B, C \in t(V, \lambda) - \lambda$.

Immediata conseguenza della proposizione precedente è che:

VIII) *Per due punti indipendenti di un sottoblocco passano* q *archi distinti inclusi in esso.*

2. Spazio $S_3(V, A)$ associato alla coppia di punti dipendenti (V, A)

Sia $t(V)$ il blocco degenere di polo V di un sistema rigato (S, R) U–regolare, A un punto di $t(V)$ distinto da V e $\boldsymbol{a} = (V, A)$ la retta di $t(V)$ cui A appartiene. Denotiamo con $\mathscr{L}(A)$ la famiglia delle linee di $t(V)$ passanti per A, con $\mathscr{K}(A)$ la famiglia degli archi di $t(V)$ passanti per A e con $\mathscr{B}(A)$ la famiglia dei sottoblocchi di $t(V)$ contenenti la retta $\boldsymbol{a}$.

Dalla U_{reg} e dalla Prop. VII del n. 1 segue rispettivamente che:

I) *Se* B *e* C *sono due punti indipendenti di* $t(V) - a$ *esiste un unico arco di* $\mathscr{K}(A)$ *passante per essi.*

II) *L'intersezione di un sottoblocco e di una linea di* $t(V)$ *è un arco.*

Proviamo che:

III) *L'intersezione di due sottoblocchi distinti di* $\mathscr{B}(A)$ *o è la retta* a, *oppure l'unione di* a *con un'altra retta passante per* V. *Ne segue che un arco*

$\lambda \in \mathscr{K}(\mathrm{A})$ *e un sottoblocco* $b \in \mathscr{B}(\mathrm{A})$, *tali che* $\lambda \nsubseteq b$, *si intersecano o nel solo punto* A, *oppure in* A *e in un altro punto* $\mathrm{B} \nsim \mathrm{A}$.

Dimostrazione. Supponiamo che due sottoblocchi $b_1, b_2 \in \mathscr{B}(\mathrm{A})$ abbiano in comune due punti B e C indipendenti tra loro e da A. L'arco passante per A, B e C sarà incluso sia in b_1 che in b_2, onde $b_1 = b_2$ e l'asserto è provato.

IV) *Sia* l *una linea di* $\mathscr{L}(\mathrm{A})$ *e* λ *un arco di* $\mathscr{K}(\mathrm{A})$, *tali che* $\lambda \subseteq l$. *Per ogni punto* $\mathrm{B} \in l - \lambda$, *esiste un unico arco* μ *passante per* B, *incluso in* l *e che interseca* λ *nel solo punto* A.

Dimostrazione. Fissato un punto $\mathrm{H} \in \lambda - \{\mathrm{A}\}$, per A, B e H passa un unico arco che risulta incluso in l, e quando H varia in $\lambda - \{\mathrm{A}\}$ si ottengono q archi distinti per A e B e inclusi in l. Detto μ il rimanente arco per A e B incluso in l (cfr. Prop. IV, n. 1), esso risulta l'unico arco per B, incluso in l e che interseca λ nel solo punto A.

V) *Sia* b *un sottoblocco di* $\mathscr{B}(\mathrm{A})$ *e* λ *un arco di* $\mathscr{K}(\mathrm{A})$, *tali che* $\lambda \subseteq b$. *Per ogni punto* $\mathrm{B} \in b - \{\lambda \cup a\}$ *esiste un unico arco* μ *di* $\mathscr{K}(\mathrm{A})$ *che interseca* λ *nel solo punto* A.

Dimostrazione. Osserviamo che l'intersezione di λ con la retta (B, V) è un punto T distinto da A, perché $\mathrm{B} \notin (\mathrm{A}, \mathrm{V})$. Fissato un punto $\mathrm{H} \in \lambda - \{\mathrm{A}, \mathrm{T}\}$, per A, B e H passa un unico arco che risulta incluso in b (cfr. Prop. VII, n. 1) e quando H varia in $\lambda - \{\mathrm{A}, \mathrm{T}\}$ si ottengono $q-1$ archi distinti per A e B inclusi in b. Detto μ il rimanente arco per A e B incluso in b (cfr. Prop. VIII, n. 1), esso risulta l'unico arco di $\mathscr{K}(\mathrm{A})$ passante per B e che interseca λ nel solo punto A.

Di verifica immediata sono le seguenti proposizioni:

VI) *Una retta* s *di* $t(\mathrm{V})$ *e un sottoblocco* $b \in \mathscr{B}(\mathrm{A})$, *tali che* $s \nsubseteq b$, *s'intersecano nel solo punto* V.

VII) *Una retta di* $t(\mathrm{V})$ *e una linea di* $\mathscr{L}(\mathrm{A})$ *s'intersecano in un unico punto distinto da* V.

VIII) *Un arco* $\lambda \in \mathscr{K}(\mathrm{A})$ *e una linea* $l \in \mathscr{L}(\mathrm{A})$, *tali che* $\lambda \nsubseteq l$, *s'intersecano o nel solo punto* A, *oppure in* A *e in un altro punto* $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$.

IX) *Esistono in* $t(\mathrm{V}) - a$ *quattro punti distinti non tutti appartenenti ad uno stesso sottoblocco di* $\mathscr{K}(\mathrm{A})$ *o ad una stessa linea di* $\mathscr{L}(\mathrm{A})$.

Posto:

$$\tilde{\mathscr{L}}(\mathrm{A}) = \{l - \{\mathrm{A}\}\}_{l \in \mathscr{L}(\mathrm{A})} \quad , \quad \tilde{\mathscr{K}}(\mathrm{A}) = \{\lambda - \{\mathrm{A}\}\}_{\lambda \in \mathscr{K}(\mathrm{A})}$$

$$\tilde{\mathscr{B}}(\mathrm{A}) = \{b - \{\boldsymbol{a}\}\}_{b \in \mathscr{B}(\mathrm{A})} \quad , \quad \mathscr{R} = \tilde{\mathscr{K}}(\mathrm{A}) \cup \{\boldsymbol{s} - \{\mathrm{V}\}\}_{\boldsymbol{s} \in \mathrm{F}_{\mathrm{V}} - \boldsymbol{a}}$$

$$\Pi = \tilde{\mathscr{B}}(\mathrm{A}) \cup \tilde{\mathscr{L}}(\mathrm{A}),$$

proviamo che:

X) *Lo spazio geometrico* $(t(\mathrm{V}) - a, \mathscr{R}, \Pi)$ *risulta uno spazio affine a tre dimensioni d'ordine* q.

Dimostrazione. Dette «rette» gli elementi di $\mathcal{R}$ e «piani» quelli di Π diremo che due «rette» $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ sono parallele se sono complanari e ad intersezione vuota, oppure coincidono. Tenendo conto delle proposizioni precedenti si prova immediatamente che sono verificate le seguenti proprietà:

(i) *per due punti distinti passa un'unica «retta»* (cfr. assioma (*a*) della Premessa; Prop. I);

(ii) *due «piani» distinti s'intersecano o in una «retta» o nel vuoto* (cfr. condizione U del n. 1; Prop. II, III);

(iii) *un «piano» e una «retta» non contenuta in esso s'intersecano al più in un punto.* (cfr. Prop. III, VII, VIII);

(iv) *una «retta» e un punto che non le appartiene sono contenuti in un unico «piano»* (cfr. cond. U_{reg} del n. 1; Prop. I);

(v) *esistono quattro punti non complanari. Ogni «retta» possiede almeno due punti. Ogni «piano» possiede almeno tre punti non allineati.*

Le proprietà precedenti definiscono, come è noto, uno spazio affine a tre dimensioni (ad esempio cfr. [6], n. 3) e quindi l'asserto è provato.

In $(t(\mathrm{V})-a, \mathrm{R}, \Pi)$ diremo *speciale* la direzione δ individuata dalle «rette» $\{\boldsymbol{s} - \{\mathrm{V}\}\}_{\boldsymbol{s}\in \mathrm{F_V}-\{\boldsymbol{a}\}}$ e denoteremo con $\alpha(\mathrm{V}, \mathrm{A})$ il «piano» improprio. Diremo, poi, *spazio associato alla coppia di punti dipendenti* (V, A) e lo denoteremo con $\mathrm{S_3}(\mathrm{V}, \mathrm{A})$, lo spazio proiettivo di dimensione tre e ordine q ampliamento di $(t(\mathrm{V}) - \boldsymbol{a}, \mathcal{R}, \Pi)$ mediante l'introduzione dei punti impropri. $\mathrm{S_3}(\mathrm{V}, \mathrm{A})$ risulta irriducibile perché ogni sua retta possiede $q+1$ punti distinti ed è $q \geq 2$. Inoltre ogni linea di $t(\mathrm{V})$ non passante per A, privata del punto che appartiene ad $\boldsymbol{a}$, a cui si aggreghi il punto improprio speciale δ, risulta una (q^2+1)–calotta di $\mathrm{S_3}(\mathrm{V}, \mathrm{A})$. Una tale (q^2+1)–calotta risulta, come è noto (cfr. [1], [8]), una quadrica ellittica nel caso in cui q sia un intero dispari.

3. Caratterizzazione dei sistemi rigati isomorfi ad una quadrica ellittica dello $\mathrm{S}_{5,q}$

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica ellittica di uno spazio di Galois $\mathrm{S}_{5,q}$. Denotata con $\mathrm{R}_{\mathcal{Q}}$ la famiglia delle rette di $\mathcal{Q}$, lo spazio geometrico $(\mathcal{Q}, \mathrm{R}_{\mathcal{Q}})$ è un sistema rigato di seconda specie (cfr. [10], [12]) che risulta U–regolare. I blocchi degeneri di $(\mathcal{Q}, \mathrm{R}_{\mathcal{Q}})$ sono le intersezioni della quadrica con gli iperpiani ad essa tangenti, quindi risultano dei coni proiettanti da un punto quadriche ellittiche di spazi subordinati tridimensionali dello $\mathrm{S}_{5,q}$. Le linee sono tutte, e sole, le quadriche ellittiche incluse in $\mathcal{Q}$ che hanno come spazio congiungente un $\mathrm{S_3}$ la cui retta polare sia secante $\mathcal{Q}$ e l'intersezione di due siffatte quadriche aventi più di un punto in comune, (dovendo trovarsi tutta in un piano e su $\mathcal{Q}$) risulta una conica. Se V e A sono due punti dipendenti di $(\mathcal{Q}, \mathrm{R}_{\mathcal{Q}})$ e $\boldsymbol{a}$ la retta passante per V e A, lo spazio $(t(\mathrm{V}) - \boldsymbol{a}, \mathcal{R}, \Pi)$, definito al numero precedente, è quello indotto in $t(\mathrm{V}) - a$ dalla proiezione stereografica di centro A di $t(\mathrm{V}) - \boldsymbol{a}$

su un S_3 non contenente $\boldsymbol{a}$. Ne segue che tutte le linee di $t(V)$ non passanti per A, private del punto che sta su $\boldsymbol{a}$, a cui si aggreghi il punto improprio speciale δ, risultano in $S_3(V, A)$ la famiglia delle quadriche ellittiche tangenti al piano improprio $\alpha(V, A)$ di $(t(V) - \boldsymbol{a}, \mathcal{R}, \Pi)$ nel punto δ.

Sia ora (S, R) un sistema rigato di seconda specie U–regolare e supponiamo che $q = r - 1$ sia un intero dispari. Fissati in S due punti dipendenti V e A, lo spazio $S_3(V, A)$, essendo irriducibile, è coordinabile sul campo di Galois K_q. Se V′ e A′ sono due punti dipendenti di una quadrica ellittica $\mathcal{Q}$ dello $S_{5,q}$ (coordinato su K_q), gli spazi $S_3(V, A)$ e $S_3(V', A')$ sono isomorfi (perché ambedue costruiti su K_q). Indichiamo con g un isomorfismo tra $S_3(V, A)$ e $S_3(V', A')$ che trasformi il piano $\alpha(V, A)$ di $S_3(V, A)$ nel piano $\alpha(V', A')$ di $S_3(V', A')$ e il punto speciale δ del primo spazio nel punto speciale δ' del secondo. Tale isomorfismo trasforma le rette di $t(V) - (A, V)$ private del punto V nelle rette di $t(V') - (A', V')$ private di V′ e le linee di $t(V)$ passanti per A e private di esso in linee di $t(V')$ passanti per A′ e private di esso. D'altra parte l'isomorfismo g conserva le $(q^2 + 1)$–calotte e quindi nel nostro caso le quadriche ellittiche (cfr. [1]); inoltre esso trasforma piani tangenti ad una quadrica di $S_3(V, A)$ in piani tangenti alla quadrica corrispondente di $S_3(V', A')$. Ne segue che ogni linea di $t(V)$ non passante per A e privata del punto che appartiene ad (A, V) ha come corrispondente in g una linea di $t(V')$ non passante per A′ e privata del punto che sta su (A′, V′). Ricordiamo, infatti, che le linee di $t(V)$ (o di $t(V')$) non passanti per A (risp. A′) private del punto che sta su (A, V) (risp. (A′, V′)) a cui si aggreghi il punto speciale δ (risp. δ') sono quadriche ellittiche tangenti in δ (risp. δ') al piano $\alpha(V, A)$ (risp. $\alpha(V', A')$). Naturalmente quanto ora detto per g si ripete per g^{-1}.

Siano, ora, l' e l'' due linee di $t(V)$ non passanti per A, aventi un arco in comune e un punto di tale arco stia su (A, V). Le linee l' e l'' private del punto che sta su (A, V) si trasformano mediante g in due linee m' e m'' di $t(V')$ private ciascuna del proprio punto che sta su (A′, V′). Proviamo che i punti di m' e m'' che stanno su (A′, V′) (ambedue chiaramente distinti da A′) coincidono. Invero, le linee m' e m'' hanno certamente un arco in comune e un punto di tale arco deve trovarsi su (A′, V′), altrimenti la g non sarebbe biunivoca. Proviamo, ancora, che se l' e l'' sono due linee di $t(V)$ non passanti per A che s'intersecano in un punto $P \in (A, V)$ allora m' e m'' hanno anch'esse un sol punto in comune e tale punto sta su (A′, V′). L'asserto è immediato se ci si riconduce al caso precedentemente esaminato, considerando una linea di $t(V)$ per P che abbia un arco in comune con l' e uno in comune con l''. A questo punto possiamo considerare l'applicazione f prolungamento della g (che è un'applicazione tra $t(V) - (A, V)$ e $t(V') - (A', V')$) a tutto $t(V)$ definendola nel modo seguente: poniamo $V' = f(V)$, $f(P) = g(P)$ $\forall P \in t(V) - (A, V)$ e facciamo corrispondere ad un punto $P \in (A, V)$ il punto $P' \in (A', V')$ per cui passa una linea di $t(V')$ corrispondente in g di una qualsiasi linea di $t(V)$ passante per V. L'applicazione f così ottenuta è senz'altro biunivoca ed inoltre essa è un isomorfismo tra i due blocchi degeneri $t(V)$

e t (V′), dotati della struttura geometrica indotta in essi dalle loro rette e dalle loro linee. In definitiva possiamo affermare che:

I) *Assegnato un sistema rigato di seconda specie* U*–regolare, con* $q = r - 1$ *dispari, un suo qualunque blocco degenere è isomorfo ad ogni blocco degenere del sistema rigato associato ad una quadrica ellittica dello* $S_{5,q}$, *quando tali blocchi sono dotati della struttura geometrica indotta in essi dalle loro rette e dalle loro linee.*

Dalla Prop. VI del n. 1 segue allora che:

II) *Un sistema rigato di seconda specie* U*–regolare, con* $q = r - 1$ *dispari, è isomorfo al sistema rigato associato ad una quadrica ellittica dello* $S_{5,q}$.

Bibliografia

[1] A. Barlotti (1955) – *Un'estensione del teorema di Segre–Kustaanheimo*, « Boll. U.M.I. » (3) *10*, 498–506.
[2] F. Buekenhout e E. Shoult – *On the foundations of polar geometry*, Preprint de l'Université libre de Bruxelles.
[3] P. Dembowski (1968) – *Finite geometries*, Springer, Berlin.
[4] F. Mazzocca (1974) – *Immergibilità in* $S_{4,q}$ *di certi sistemi rigati di seconda specie*, « Rendic. dell'Accad. Naz. Lincei », *56* (2), 189–196.
[5] F. Mazzocca (1973) – *Sistemi grafici rigati di seconda specie*, Relaz. n. 28, « Ist. Mat. Univ. Napoli ».
[6] F. Mazzocca (1974) – *Sistemi rigati di seconda specie* U*–regolari*, Relaz. n. 32, « Ist. Mat. Univ. Napoli ».
[7] B. Segre (1961) – *Lectures of modern geometry*, Cremonese Ed., Roma.
[8] B. Segre (1967) – *Introduction to Galois geometries*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. di Sc. fis. mat. e nat. », ser. VIII, sez. I (5), 137–236.
[9] G. Tallini (1970) – *Strutture geometriche*, vol. I, Liguori Ed., Napoli.
[10] G. Tallini (1971) – *Ruled graphic systems*, « Atti Conv. Geom. Comb. Perugia », 385–393.
[11] G. Tallini (1971) – *Sistemi grafici rigati*, Relaz. 8, « Ist. Mat. Univ. Napoli ».
[12] G. Tallini (1971) – *Strutture d'incidenza dotate di polarità*, « Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano », 1–41.
[13] G. Tallini (1973) – *Strutture grafiche proiettive*, Liguori Ed. Napoli.
[14] F. Tallini (1974) – *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relaz. n. 30, « Ist. Mat. Univ. Napoli ».
[15] J. Tits (1959) – *Sur la trialité et certains groupes qui s'en deduisent*, « Publ. Math., Paris », *2*, 14–60.