

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

VALENTIN BOJU, MARIANA POPESCU

**Changements conformes de métrique du point de vue  
global**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 57 (1974), n.5, p. 346–349.*  
Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1974\\_8\\_57\\_5\\_346\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_346_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Geometria differenziale.** — *Changements conformes de métrique du point de vue global.* Nota di VALENTIN BOJU e MARIANA POPESCU, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si studiano i cambiamenti conformi di metrica fra varietà riemanniane,  $g' = \rho^2 g$ , che conservano la curvatura. Si stabilisce che, se un siffatto cambiamento non è un'omotetia, le traiettorie del grad  $\rho$  sono delle geodetiche, e che le  $\rho = \text{cost.}$  sono delle varietà sferiche.

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ ,  $g$  étant le champ tensoriel métrique, et

$$g' = \rho^2 g \quad (\rho \in C^\infty, \rho > 0)$$

un changement conforme du tenseur métrique qui conserve le champ tensoriel de courbure  $R$ .

Soit

$$\alpha = d \log \rho$$

$$\omega_Y(Z) = g(Y, Z), \quad \text{où } Y, Z \in D^1(M), \omega_Y \in D_1(M),$$

et  $U$  est le champ vectoriel donné par la formule  $\omega_u = \alpha$ .

Soit  $\beta$  la forme symétrique donnée par

$$(1) \quad \beta(Y, Z) = \nabla_Y(\alpha)Z - \alpha(Y)\alpha(Z) + \frac{1}{2}\alpha(u)\langle Y, Z \rangle$$

où

$$\langle X, Y \rangle = g(X, Y).$$

On sait (voire [1]) qu'un changement conforme de métrique

$$(2) \quad g' = \rho^2 g$$

conserve le champ tensoriel de courbure si, et seulement si, la forme  $\beta$  est identiquement nulle; si  $\beta = 0$  et  $\alpha$  est nulle au point  $x_0$ , alors  $\alpha = 0$  sur  $M$  (et  $\rho$  est constante).

Il en résulte qu'il est particulièrement intéressant le cas quand  $\alpha$  n'a pas des zéros, donc, quand  $\rho$  n'a pas des points critiques.

Dans ce dernier cas, toute surface de niveau constant de la fonction  $\rho$  est une sous-variété riemannienne de  $M$ , admettant comme champ vectoriel normal unitaire le champ

$$N = \frac{1}{\|\text{grad } \rho\|} \text{grad } \rho.$$

(\*) Nella seduta del 14 novembre 1974.

Soit  $p \in M$  et soit  $\{X_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , un système des champs vectoriels dans un voisinage  $V$  du point  $p$  tel que

$$X_1 = N, \quad \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Le champ  $X_i$  est tangent à chaque surface de niveau de la fonction  $\rho$ , pour  $i > 1$ , donc

$$(3) \quad X_i \rho = 0, \quad i > 1; \quad \alpha_i = \alpha(X_i) = 0; \quad \alpha_1 = \alpha(X_1) = \frac{1}{\rho} \|\text{grad } \rho\|.$$

De

$$\langle U, Y \rangle = \omega_u Y = \alpha(Y) = Y(\log \rho) = \frac{1}{\rho} Y\rho = \left\langle \frac{1}{\rho} \text{grad } \rho, Y \right\rangle,$$

il en résulte

$$(4) \quad U = \frac{1}{\rho} \|\text{grad } \rho\| \cdot N.$$

En tenant compte que

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^K X_K, \quad (\nabla_X \alpha) Y = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y),$$

la condition que  $\beta$  soit nulle, écrite pour  $Y = X_i, Z = X_j$ , devient

$$(5) \quad X_i \alpha_j - \Gamma_{ij}^K \alpha_K - \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{2\rho^2} \|\text{grad } \rho\|^2 \delta_{ij} = 0.$$

Pour  $j \neq 1$  nous avons

$$\Gamma_{ij}^1 \alpha_1 = \frac{1}{2\rho^2} \|\text{grad } \rho\|^2 \delta_{ij};$$

donc

$$(6) \quad \Gamma_{ij}^1 = 0 \quad (i \neq j, \quad j \neq 1),$$

$$(7) \quad \Gamma_{ii}^1 = \frac{1}{2\rho} \|\text{grad } \rho\| \quad (i = j \neq 1).$$

Pour  $j = 1$  nous obtenons:

$$X_i(\alpha_1) - \Gamma_{i1}^1 \alpha_1 - \alpha_i \alpha_1 + \frac{1}{2\rho^2} \|\text{grad } \rho\|^2 \delta_{i1} = 0;$$

donc:

$$(8) \quad X_i(\alpha_1) = \Gamma_{i1}^1 \alpha_1 \quad (i \neq 1, \quad j = 1),$$

$$(9) \quad N(\alpha_1) - \Gamma_{11}^1 \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1)^2 = 0.$$

Mais

$$0 = X_i \langle N, N \rangle = 2 \langle \nabla_{X_i} N, N \rangle = 2 \Gamma_{i1}^K \langle X_K, N \rangle = 2 \Gamma_{i1}^1;$$

donc

$$(10) \quad \Gamma_{i1}^1 = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Les équations (8) et (9) deviennent:

$$(8) \quad X_i(\alpha_1) = 0 \quad (i \neq 1),$$

$$(9) \quad N\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Les formules (3) et (8) nous donnent

$$(11) \quad X_i \parallel \text{grad } \rho \parallel = 0 \quad (i \neq 1);$$

donc  $\parallel \text{grad } \rho \parallel$  est une fonction localement constante sur chaque surface de niveau de la fonction  $\rho$ .

Mais

$$(12) \quad \langle \nabla_{X_i} N, X_j \rangle = - \langle N, \nabla_{X_i} X_j \rangle = - \Gamma_{ij}^1;$$

donc, en tenant compte de (10), pour  $j = 1$  nous avons

$$(13) \quad \langle \nabla_{X_i} N, N \rangle = 0.$$

D'autre part, en tenant compte de (6) nous avons:

$$(14) \quad \langle \nabla_X N, X_j \rangle = 0 \quad (i \neq j, j \neq 1).$$

Les formules (13) et (14) nous donnent

$$(15) \quad \nabla_{X_i} N = \underset{(i)}{\lambda} X_i \quad \text{où} \quad \underset{(i)}{\lambda} \in C^\infty, \quad i = 2, \dots, n.$$

En tenant compte que

$$0 = X_i \langle X_i, N \rangle = \Gamma_{ii}^1 + \langle X_i, \nabla_{X_i} N \rangle$$

et de la formule (15), nous obtenons

$$(16) \quad -\underset{(i)}{\Gamma_{ii}^1} = \underset{(i)}{\lambda}.$$

Les relations (7) et (16) nous donnent

$$(17) \quad \underset{(2)}{\lambda} = \dots = \underset{(n)}{\lambda} \stackrel{\text{notat}}{=} f = - \frac{1}{2} \frac{\parallel \text{grad } \rho \parallel}{\rho}.$$

En tenant compte de (17), la formule (15) devient:

$$(18) \quad \nabla_{X_i} N = f X_i$$

Soit  $L$  l'opérateur de Weingarten d'une surface de niveau constant de la fonction  $\rho$ . La formule (18) nous montre que chaque point de la surface de niveau est sphérique. En tenant aussi compte de (17), nous avons ainsi démontré le

**THÉORÈME 1.** *Chaque composante connexe  $C_a$  de l'hypersurface de niveau  $\Sigma_a$  est sphérique ( $f$  est constante sur chaque composante connexe de hypersurface  $\Sigma_a$ ).*

En tenant compte de (11) nous avons:

$$\begin{aligned} 0 &= X_i \parallel \text{grad } \rho \parallel = \\ &= \frac{1}{2 \parallel \text{grad } \rho \parallel} X_i \langle \text{grad } \rho, \text{grad } \rho \rangle = \frac{1}{\parallel \text{grad } \rho \parallel} \langle \nabla_{X_i} \text{grad } \rho, \text{grad } \rho \rangle = \\ &= \frac{1}{\parallel \text{grad } \rho \parallel} \langle \nabla_{\text{grad } \rho} X_i, \text{grad } \rho \rangle + \frac{1}{\parallel \text{grad } \rho \parallel} \langle [X_i, \text{grad } \rho], \text{grad } \rho \rangle = \\ &= \parallel \text{grad } \rho \parallel \langle \nabla_N X_i, N \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$(19) \quad \Gamma_{i1}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^i = 0.$$

En faisant  $i = j = 1$  dans (12), nous obtenons

$$(20) \quad \langle \nabla_N N, N \rangle = 0.$$

En tenant compte de (19), nous avons

$$(21) \quad \langle \nabla_N N, X_i \rangle = \Gamma_{11}^i = 0.$$

D'autre part, en tenant compte de (20) et (21), nous avons

$$\nabla_N N = 0.$$

Donc, nous obtenons le

THÉORÈME 2. *Les trajectoires du champ grad  $\varphi$  (paramétrisées naturellement) sont des géodésiques.*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] NOMIZU K. and YANO K. (1967) – *Some Results Related to the Equivalence Problem in Riemannian Geometry*, «Math. Zeitschr.», 97, 29–37.
- [2] BOJU V. et POPESCU M. – *Changements conformes qui invarient la courbure*, «Bulletin scientifique de l'Institut polytechnique», Cluj.