ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

SALVATORE COEN

Una nota sul problema di Poincaré

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.5, p. 342–345.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_342_0>

Geometria. — *Una nota sul problema di Poincaré.* Nota di SALVATORE COEN [(*)], presentata [(**)] dal Corrisp. A. ANDREOTTI.

SUMMARY. — We study a new Poincaré problem for meromorphic functions which is intermediate between the weak Poincaré problem and the strong one.

Sia X uno spazio analitico complesso [(1)] di fascio strutturale $\mathcal{O}$; $\Gamma(X, \mathcal{O})$ sia l'anello delle funzioni olomorfe su X. Una *k-soluzione di Poincaré* (k intero > 0) per F su X è una k-upla $(h_1, g_1), \cdots, (h_k, g_k)$ di coppie di funzioni olomorfe su X tali che $F = h_1/g_1 = \cdots = h_k/g_k$ (i.e. per ogni $j \in \{1, \cdots, k\}$ vale $g_j F = h_j$ e g_j non è divisore dello zero in $\Gamma(X, \mathcal{O})$) e tali che ad ogni $x \in X$ sia associato un indice j, $1 \leq j \leq k$, per cui i germi $(h_j)_x$, $(g_j)_x$ siano relativamente primi nell'anello $\mathcal{O}_x$ (i.e. gli unici elementi di $\mathcal{O}_x$ che dividono sia $(h_j)_x$ che $(g_j)_x$ siano le unità). Il *problema di Poincaré* (chiamato a volte «il problema forte di Poincaré») è risolubile su X quando ogni funzione meromorfa su X ammette una 1-soluzione di Poincaré.

Diamo una prima caratterizzazione elementare dell'esistenza delle k-soluzioni in certi casi.

1. OSSERVAZIONE. *Sia* F *una funzione meromorfa su una varietà complessa n-dimensionale* X; *le seguenti condizioni sono equivalenti*:

1) *ad ogni* $x \in X$ *sono associate due funzioni* $h, g \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ *con* $F = h/g$ *e* h_x, g_x *relativamente primi in* $\mathcal{O}_x$;

2) F *ammette una k-soluzione di Poincaré con* $k \leq n + 1$.

Dimostrazione: 1) $\Rightarrow$ 2). Per ogni $x \in X$ definiamo il seguente ideale di $\mathcal{O}_x$,

$$\mathcal{F}_x = \{f_x \in \mathcal{O}_x \mid f_x F_x \in \mathcal{O}_x\};$$

$\mathcal{F}_x$ è un ideale principale; i generatori di $\mathcal{F}_x$ sono i germi $g_x \in \mathcal{F}_x$ tali che $F_x g_x$, g_x siano relativamente primi in $\mathcal{O}_x$. Poniamo $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{x \in X} A_x$ con $A_x = \{f \in \Gamma(X, \mathcal{O}) \mid f_x \in \mathcal{F}_x\}$; per il teorema dei moduli chiusi (v. H. Cartan [2]), ogni A_x è chiuso in $\Gamma(X, \mathcal{O})$. Ne segue che $\Gamma(X, \mathcal{F})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti è uno spazio di Fréchet.

Proviamo, ora, che per ogni $z \in X$ l'insieme $B_z := \{f \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid f_z$ genera $\mathcal{F}_z\}$ è aperto e denso in $\Gamma(X, \mathcal{F})$ in quanto complementare in $\Gamma(X, \mathcal{F})$ di un sottospazio proprio chiuso. Sia, infatti, $\{f_j\}_{j \geq 1}$ una successione di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ convergente ad f e tale che $f_j \notin B_z$ per $j \geq 1$. Sia g_z un generatore

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Naz. Strutture Alg. e Geom. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1974.

(1) Tutti gli spazi complessi considerati sono ridotti ed a base numerabile. I dettagli delle dimostrazioni qui solo accennate si trovano in [3].

di $\mathscr{F}_z$; si ha $(f_j)_z = (h_j)_z g_z$, $f_z = h_z g_z$ con $(h_j)_z$, $h_z \in \mathcal{O}_z$ ed $h_j(z) = 0$ per $i \geq 1$. Indichiamo con s l'ordine di zero di g; in un intorno coordinato di z la successione $\{D^s f_j(z)\}_{j\geq 1}$ converge a $D^s f(z) = D^s g(z) \cdot h(z) = 0$ e quindi $f \notin B_z$.

Sia N_1 un sottoinsieme numerabile denso di X; per il teorema di Baire $\bigcap_{x \in N_1} B_x$ è denso in $\Gamma(X, \mathscr{F})$ e quindi contiene almeno un elemento g_1; notiamo che $Y_1 = \{x \in X \mid (g_1)_x$ non genera $\mathscr{F}_x\}$ è un sottoinsieme analitico di X con $\dim_{\mathbf{C}} Y_1 < n$. Nel caso sia $Y_1 = \varnothing$, $(g_1 F, g_1)$ è una 1-soluzione di Poincaré per F su X. Se $Y_1 \neq \varnothing$ scegliamo un sottoinsieme numerabile e denso N_2 di Y_1 e sia $g_2 \in \bigcap_{x \in N_2} B_x$. Poniamo $Y_2 = \{x \in X \mid$ né $(g_1)_x$ né $(g_2)_x$ generano $\mathscr{F}_x\}$; allora $\dim_{\mathbf{C}} Y_2 < n - 1$. Ripetendo questo procedimento un numero finito $k \leq n + 1$ di volte, troviamo una k-soluzione $(g_1 F, g_1), \cdots, (g_k F, g_k)$ di Poincaré per F su X. q.e.d.

Nella dimostrazione testé conclusa si è definito un fascio $\mathscr{F}$ mediante le sue spighe $\mathscr{F}_x$; tale fascio sarà in seguito indicato con $\mathscr{F}_F$; esso è analitico coerente anche se X ha singolarità (v. [1]). La condizione 1) di 1. equivale alla validità del Teorema A di H. Cartan per $\mathscr{F}$ su X. Con una prova analoga alla precedente si può mostrare la seguente

2. PROPOSIZIONE. *Sia $\mathscr{F}$ un fascio analitico coerente su uno spazio complesso n-dimensionale* X; *sia $\mathscr{C}$ la famiglia delle componenti irrudicibili di* X, *non contenute nel supporto di $\mathscr{F}$. Valga il Teorema A per $\mathscr{F}$ su* X. *Esistono, allora,* $k \leq n + 1$ *sezioni globali* $g_1, \cdots, g_k$ *di $\mathscr{F}$ tali che per ogni* $x \in X$ *almeno una di tali sezioni, sia* g_s, *induca un germe* $(g_s)_x$ *parte di un sistema minimale di generatori di* $\mathscr{F}_x$ *su* $\mathcal{O}_x$. *Inoltre per ogni* $s \in \{1, \cdots, k\}$ *e per ogni* $C \in \mathscr{C}$ *esiste* $x \in C$ *tale che* $(g_s)_x$ *sia parte di un sistema minimale di generatori di* $\mathscr{F}_x$ *su* $\mathcal{O}_x$. *Se* X *è di Stein ed* $n \geq 1$ *si può scegliere* $k \leq n$.

Notiamo che se F è una funzione meromorfa su X e se $g_x \in (\mathscr{F}_F)_x$ è parte di un sistema minimale di generatori di $(\mathscr{F}_F)_x$ senza essere divisore dello zero in $\mathcal{O}_x$, allora $g_x F_x$, g_x sono germi relativamente primi. Seguono, così, sulla base di 2, varie generalizzazioni di 1; in particolare il seguente:

3. TEOREMA. *Sia* X *uno spazio normale di Stein di dimensione* $n \geq 1$; *ogni funzione meromorfa* F *su* X *ammette una n-soluzione di Poincaré su* X.

Il Teorema si estende ad altri casi, per esempio a varietà X che siano corone complete con $\dim_{\mathbf{C}} X \geq 3$.

Un *esempio*. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid xy = z^2\}$ e sia $F(x, y, z) = \frac{x}{z} = \frac{z}{y}$; X è uno spazio normale di Stein e (x, z), (z, y) sono una 2-soluzione di Poincaré per F su X. Non vi sono 1-soluzioni di Poincaré per F. Supponiamo infatti, per assurdo, che (h, g) sia tale; sia $0 = (0, 0, 0)$; sull'insieme $R = X \setminus \{0\}$ si ha $x = \sigma h^2$ ove $\sigma = \frac{z}{hg} \in \Gamma(R, \mathcal{O})$. Per il teorema di prolungamento di Riemann, σ si prolunga olomorficamente su tutto X; ciò è in contraddizione con l'irriducibilità del germe x_0 nell'anello $\mathcal{O}_0$. Notiamo anche che il fascio $\mathcal{F}_F$ non è a ideali principali e che la retta $y = 0$, $z = 0$, luogo dei poli di F, non è intersezione completa in X.

Il Teorema 3 può precisarsi mediante l'impiego di risultati di O. Forster e K. J. Ramspott nel caso che $\mathcal{F}_F$ abbia rango limitato. In particolare si ha:

4. PROPOSIZIONE. *Sia* F *una funzione meromorfa su una varietà complessa n–dimensionale* X. *Se* X *è un aperto su una varietà di Stein, allora* F *ammette una k–soluzione di Poincaré con* $k = 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ($k = 1$ *per* $n = 1$). *Se* X *è una varietà di Stein ed il luogo* P_F *dei poli di* F *è una sottovarietà connessa di* X, *allora* F *ammette una* $\left(1 + \left[\frac{n}{2}\right]\right)$*–soluzione di Poincaré.*

Dimostrazione. Nel primo caso X ammette uno inviluppo di meromorfia Y che è una varietà di Stein (v. [7]). Possiamo così supporre che X sia una varietà di Stein; $\mathcal{F}_F$ è un fascio a ideali principali; da [5] si ricava che $\Gamma(X, \mathcal{F}_F)$ è un $\Gamma(X, \mathcal{O})$–modulo con $k = 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ($k = 1$ se $n = 1$) generatori $g_1, \cdots, g_k$; ne segue che $(g_1 F, g_1), \cdots, (g_k F, g_k)$ è una k–soluzione di Poincaré per F. Nel secondo caso sia $\mathcal{J}$ il fascio associato a P_F e sia s l'ordine di polo di F su P_F. Per [4] esistono $k = 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ sezioni $g_1, \cdots, g_k$ di $\mathcal{J}$ su X le quali generano $\Gamma(X, \mathcal{J})$ come $\Gamma(X, \mathcal{O})$–modulo. Le coppie $(g_1^s F, g_1^s), \cdots, (g_k^s F, g_k^s)$ costituiscono una delle k–soluzioni cercate.

5. ESEMPIO. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \,\|\, x^2 + y^2 - z^2 - 1 \,| < 1\}$. Questo poliedro analitico è stato studiato da H. Whitney in [9] (cfr. J. P. Serre [8]). La funzione $(x, y, z) \to w$ ove $w^2 = x^2 + y^2 - z^2$, $\mathrm{Re}\, w > 0$, è olomorfa su X; sono pure olomorfe le funzioni $\psi_1(x, y, z) = w + y$, $\psi_2 = w - y$, $\varphi_1 = x + z$, $\varphi_2 = x - z$; si ha $\varphi_1 \varphi_2 = \psi_1 \psi_2$. In [9] è dimostrato con metodi elementari che ψ_1 è irriducibile nell'anello $\Gamma(X, \mathcal{O})$. Consideriamo la funzione meromorfa

$$F = \frac{\psi_1}{\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\psi_2}.$$

Conformemente alla precedente proposizione, F ammette una 2–soluzione di Poincaré su X, per esempio $(\psi_1, \varphi_1), (\varphi_2, \psi_2)$. La funzione meromorfa F non ammette alcuna 1–soluzione di Poincaré (h, g) su X. In caso contrario si avrebbe $\varphi_1 = gu$, $\psi_2 = gv$ con $u, v \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. Poiché ψ_1 è irriducibile e g non è unità, la funzione u sarebbe unità e quindi φ_1 dividerebbe ψ_2 in $\Gamma(X, \mathcal{O})$; assurdo. Notiamo anche che l'anello di integrità $\Gamma(X, \mathcal{O})$ non ammette M.C.D. (= Massimo Comun Divisore). Supponiamo infatti che ogni coppia $a, b, \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ ammetta un M.C.D. notato con (a, b). In tal caso si avrebbe $(\psi_1, \varphi_2) = (\psi_1, (\psi_1 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2)) = ((\psi_1, \psi_1 \varphi_2), \varphi_1 \varphi_2) = \psi_1$; assurdo. Si osservi che la varietà dei poli di F, cioè $\{(x, y, z) \in X \mid x = -z, w = y\}$ non è intersezione completa in X. Infine notiamo che le funzioni φ_1, ψ_1 sono relativamente prime nell'anello $\Gamma(X, \mathcal{O})$, ma che i germi da esse indotti non sono relativamente primi in ogni punto di X; infatti nei punti Q della sottovarietà $\{(x, y, z) \in X \mid x = -z, w = -y\}$, il germe $(\varphi_1)_Q$ non è unità e divide $(\psi_1)_Q$.

Il primo esempio di una funzione meromorfa senza 1–soluzioni di Poincaré (su un aperto di $\mathbf{C}^2$) è stato fornito da Gronwall in [6].

Se X è una varietà complessa connessa sulla quale sia risolubile il problema di Poincaré, allora ogni coppia di funzioni non nulle $a, b \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ ammette un M.C.D. δ e δ_x è M.C.D. di a_x, b_x per ogni $x \in X$. Infatti basta porre $\delta = \frac{a}{g}$ ove (h, g) è una 1–soluzione di Poincaré per a/b. In particolare, sia X una varietà di Stein del tipo precedente e sia $\mathcal{D} = \{U_i, f_i\}_{i \in I}$ un divisore non negativo su X; per 2. esistono k funzioni olomorfe globali $d_1, \cdots, d_k$ con la proprietà che ad ogni $x \in U_i$ sia associato un indice j, $1 \leq j \leq k$, per cui $(d_j)_x = u_x (f_i)_x$ con u_x unità in $\mathcal{O}_x$. Sia δ un M.C.D. di $d_1, \cdots, d_k$; δ è una soluzione di $\mathcal{D}$. *Quindi per una varietà di Stein di dimensione finita la risolubilità del problema moltiplicativo di Cousin è equivalente alla risolubilità del problema di Poincaré.*

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BĂNICĂ e O. STĂNĂȘILĂ (1969) – *Problème de Poincaré pour un espace de Stein*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, *47*, 25–26.

[2] H. CARTAN (1944) – *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes*, « Ann. Sci. Ecole Nor. Super. », *61*, 149–197.

[3] S. COEN – *Some Consequences of Theorem A for complex Spaces*, apparirà sugli « Annali di Matematica pura ed applicata ».

[4] O. FORSTER e K. J. RAMSPOTT (1966) – *Analytische Modulgarben und Endromisbündel*, « Inv. Math. », *2*, 145–170.

[5] O. FORSTER e K. J. RAMSPOTT (1968) – *Homotopieklassen von Idealbasen in Steinschen Algebren*, « Inv. Math. », *5*, 255–276.

[6] T. H. GRONWALL (1917) – *On the expressibility of a uniform funct. of several compl. var. as the quotient of two funct. of entire character*, « Amer. Math. Soc. Trans. », *18*, 50–64.

[7] J. KAJIAWARA e E. SAKAI (1967) – *Generalization of Levi-Oka's Theorem concerning meromorphic funct*, « Nagoja Math. J. », *29*, 75–84.

[8] J. P. SERRE (1953) – *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, « Coll. sur les fonct. de plus. var. », Bruxelles, 57–68.

[9] H. WHITNEY (1972) – *Complex analytic varieties*. Addison-Wesley.