Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Gonzalez Dominguez, Susana Elena Trione

Sul prodotto moltiplicativo di distribuzioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.5, p. 321–323.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_321_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Analisi. — *Sul prodotto moltiplicativo di distribuzioni.* Nota di
ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ e SUSANA ELENA TRIONE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — As a generalization of formula (1,3), due to Guerra (cfr. [3]), which is useful in quantum theory of fields, we prove formula (3,1).

1. Nella teoria quantica dei campi appaiono sovente prodotti moltiplicativi di distribuzioni che non possono giustificarsi in base ai teoremi usuali. Esempi di simili prodotti sono:

$$\delta \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\,\delta' , \tag{1,1}$$

$$\delta^2 - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{x^2} , \tag{1,2}$$

$$(P - i0)^{-1} \cdot \delta = \frac{1}{8}\,\square\,\delta , \tag{1,3}$$

dove, nell'ultima formula, abbiamo posto

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \quad , \qquad P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 ;$$

inoltre, per il significato del simbolo $(P - i0)^{-1}$, cfr. la formula (2,2). Per la giustificazione della prima formula, cfr. [1]; per la giustificazione dalla seconda, cfr. [2]; la terza formula è dovuta a F. Guerra, cfr. [3], p. 530.

Scopo di questa Nota è di stabilire la (3,1), che generalizza la formula (1,3) di Guerra. La dimostrazione della nostra formula si fa collo stesso metodo usato per provare le formule (1,1) e (1,2); esso consiste essenzialmente nell'approssimare i due fattori del prodotto «eterodosso» di cui si tratta mediante rispettive regolarizzate dove appare *lo stesso* nucleo singolare, e quindi passare al limite; cfr. [4].

2. Siano $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $\mathbf{R}^n$; $\alpha \in \mathbf{C}$; p, q, intieri ≥ 0, $p+q=n$. Porremo

$$P(x) = P = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 ,$$

$$L^k = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right\}^k ; \qquad k = 1, 2, \cdots .$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1974.

Consideriamo le distribuzioni meromorfe della variabile complessa α

$$(2,1) \qquad H_\alpha \{P \pm io, n\} = \{C^\pm\} \cdot \{P \pm io\}^{(\alpha-n)/2},$$

dove $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$, ed inoltre

$$C^\pm = \frac{e^{(\pi/2)i\alpha}\, e^{\pm(\pi/2)i\alpha}\, \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{n/2}\, 2^\alpha\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$(2,2) \qquad \{P \pm io\}^\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \{P \pm i\varepsilon |x|^2\},$$

$$|x|^2 = \sum_{v-1}^{n} |x_v|^2.$$

La distribuzione H_α, che è un analogo «causale» («anticausale») del nucleo (ellittico) di M. Riesz (cfr. [5], p. 16) ha le seguenti interessanti proprietà (cfr. [6], p. 35, formule (11,7; 7) e (11,7; 8));

$$(2,3) \qquad H_0 \{P \pm io, n\} = \delta,$$

$$(2,4) \qquad H_{-2k} \{P \pm io, n\} = L^k \delta.$$

Strumento essenziale per la dimostrazione della successiva (3,1) è la formula (cfr. [6], p. 28, Teorema 9):

$$(2,5) \qquad \{P \pm io\}^\lambda \cdot \{P \pm io\}^\mu = \{P \pm io\}^{\lambda+\mu},$$

che è valida per λ, μ complessi, tali che λ, μ, $\lambda + \mu$ non siano della forma $-\frac{n}{2} - k$, con k intero ≥ 0.

3. Scopo di questa Nota è la dimostrazione del seguente

TEOREMA. *Ipotesi*:

a) *k intero* ≥ 1;

b) *n intero pari*,

c) $\dfrac{n-2k}{2} \geq 1$,

d) *l intero* ≥ 0;

Tesi:

$$(3,1) \qquad H_{2k} \{P \pm io, n\} \cdot H_{-2l} \{P \pm io, n\} = \{D^\pm\} \cdot L^{l+(n/2)-k}\, \delta,$$

dove abbiamo posto

$$D^\pm = \frac{\exp\left\{\pi i \left[\frac{n \pm q}{2}\right]\right\} l!\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + l\right)}{2^n\, \pi^{n/2}\, \Gamma(k)\, \Gamma(n + l - k)\, \Gamma\left(l + \frac{n}{2} + 1 - k\right)}.$$

Dimostrazione. Se si tiene conto delle (2,1), (2,5) arriviamo, dopo calcoli lunghi ma elementari che omettiamo, alla

$$(3,2)\qquad H_{2k}\{P \pm io, n\} \cdot H_{-2l}\{P \pm io, n\} = \{D^{\pm}\} H_{2(k-l)-n}\{P \pm io, n\}.$$

Osserviamo che dalla (2,4) si trae, in particolare,

$$(3,3)\qquad H_{2(k-l)-n}\{P \pm io, n\} = L^{l+(n/2)-k}\,\delta.$$

Le (3,2), (3,3) dimostrano il teorema.

4. Nel caso particolare $n = 4$, $q = 1$, $k = 1$, $l = 0$, la (3,1) si scrive

$$(4,1)\qquad H_2\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \pm io\} \cdot H_0\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \pm io\} = = \frac{e^{\pi i\left(1+\frac{1}{2}\right)}}{2^5\,\pi^2}\,\Box\,\delta.$$

Dalla (2,1) si ricava

$$(4,2)\qquad H_2\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \pm io\} = \mp \frac{i}{4\pi^2}\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \pm io\}^{-1}.$$

Dalle (2,3), (4,1) e (4,2) deduciamo quindi

$$(4,3)\qquad \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \pm io\}^{-1}\,\delta = \frac{1}{8}\,\Box\,\delta\,;$$

e questa formola (ove nel primo membro si scelga il segno negativo) coincide con la (1,3) di Guerra.

BIBLIOGRAFIA

[1] GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ A. e SCARFIELLO R. (1955) – *Nota sobre la fórmula* $vp\,\frac{1}{x}\cdot\delta = -\frac{1}{2}\,\delta'$, « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. XVII, 53–56.

[2] MIKUSINSKI J. (1966) – *On the square of the Dirac delta distribution*, « Bull. Acad. Polon. Sci., série des sciences math., astr. et phys », *14*, 511–513.

[3] GUERRA F. (1971) – *On analytic regularization in quantum field theory*, « Il Nuovo Cimento », *1A*, 523–535.

[4] MIKUSINSKI J. (1961) – *Irregular Operations on distributions*, « Studia Math. », *10*, 163–169.

[5] RIESZ M. (1949) – *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, « Acta Math. », *81*, 1–223.

[6] TRIONE S. E. (1972) – *Sobre soluciones elementales causales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, Tesis doctoral, Buenos Aires.