Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Susana Elena Trione

Sopra la trasformata di Hankel distribuzionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.5, p. 316–320.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_316_0>

Analisi. — *Sopra la trasformata di Hankel distribuzionale.* Nota di SUSANA ELENA TRIONE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We evaluate (formula (2,2)) the Hankel transform of the distribution $\delta_a^{(m)}(t)$. As a consequence of (2,2) we obtain

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\Omega_n}{(2\pi)^{n/2}} A^{n/2} J_{n/2}(At) = \delta ,$$

where Ω_n designates the area of the unit sphere in R^n. We also give a direct proof of this formula, which plays a role in the theory of the spherical summability of Fourier integrals.

1. Sia $\Phi(t)$ una funzione in $R^+ : \{t, t \geq 0\}$. La trasformata di Hankel della funzione $\Phi(t)$ è, per definizione, la funzione $g(s)$, $0 \leq s < \infty$, definita dalla formula

$$g(s) = [\mathscr{H}\{\Phi(t)\}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(t)\, t^{(n-2)/2} R_{(n-2)/2}(\sqrt{st})\, dt, \tag{1.1}$$

ove abbiamo posto

$$Rm(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Jm(x)}{x^m} ;$$

$Jm(x)$ è la ben nota funzione di Bessel d'ordine m:

$$Jm(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\nu} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(m+\nu+1)} .$$

Definiremo la trasformata di Hankel quando Φ è una distribuzione.

Sia $S_{\mathbf{R}^+}$ lo spazio delle funzioni $f(t)$ definite nella semiretta positiva $\mathbf{R}^+$, appartenti a S. Con S denotiamo, come di consueto, la famiglia delle funzioni $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^+$, indefinitamente differenziabili, che tendono a zero congiuntamente con tutte le derivate, quando $|x| \to \infty$, più rapidamente di ogni potenza di $1/|x|$. Denotiamo con $S'_{\mathbf{R}^+}$ il duale di $S_{\mathbf{R}^+}$.

Sia $U(t) \in S'_{\mathbf{R}^+}$. La trasformata di Hankel di $U(t)$ è, per definizione, la distribuzione $V(s) \in S'_{\mathbf{R}^+}$ definita dalla formula

$$\langle \mathscr{H}[U(t)], \Phi(s) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle U(t), [\mathscr{H}\{\Phi(s)\}] \rangle \tag{1.2}$$

per ogni $\Phi(s) \in S_{\mathbf{R}^+}$.

Nota. Vi sono altre definizioni della trasformata di Hankel distribuzionale; in particolare quella dovuta al Zemanian (cfr. [1], p. 141). La definizione quì adottata è quella dovuta a González Domínguez (cfr. [2], formula (AI, 3; 3), p. 70).

(*) Nella seduta del 14 novembre 1974.

2. Calcoleremo le trasformate di Hankel di alcune distribuzioni di speciale interesse nelle applicazioni.

Esempio 1:

$$\mathrm{U} = \delta_a^{(m)}.$$

Si ha

$$\langle \mathscr{H}\{\delta_a^{(m)}(t)\}, \Phi(s)\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \delta_a^{(m)}(t), \mathscr{H}\{\Phi(s)\}\rangle =$$

$$= \langle \delta_a^{(m)}(t), \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(s)\, s^{(n-2)/2}\, \mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{ts})\, ds\rangle =$$

$$= (-1)^m \left\{ \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(s)\, s^{(n-2)/2}\, \mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{ts})\, ds\right)\right\}_{t=a} =$$

$$= (-1)^m \frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \Phi(s)\, s^{(n-2)/2} \frac{d^m}{dt^m} \mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{ts})\, ds\right\}_{t=a} =$$

$$= \left\langle (-1)\frac{1}{2}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{ts})\right\}_{t=a} s^{(n-2)/2}, \Phi(s)\right\rangle .$$

Pertanto:

$$\mathscr{H}\{\delta_a^{(m)}\} = (-1)^m \frac{1}{2}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{ts})\right\}_{t=a} s^{(n-2)/2}. \tag{2,1}$$

Dalla formula di [3], p. 45, risulta

$$\frac{d^m}{dt^m}\mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{ts}) = (-1)^m \frac{s^m}{2^m}\mathrm{R}_{(n-2)/2+m}(\sqrt{ts});$$

e delle due formule precedenti otteniamo

$$\mathscr{H}\{\delta_a^{(m)}\} = \frac{1}{2^{m+1}}\mathrm{R}_{(n-2)/2+m}(\sqrt{as})\, s^{(n-2)/2+m}. \tag{2,2}$$

Esempio 2:

$$\mathrm{U} = \delta^{(m)}.$$

Dalla (2,2) otteniamo, per $a = 0$,

$$\mathscr{H}\{\delta^{(m)}\} = \frac{1}{2^{m+1}}\mathrm{R}_{(n-2)/2+m}(0)\, s^{(n-2)/2+m}.$$

Tenendo conto che

$$\mathrm{R}_{(n-2)/2+m}(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2m-1}{2}\right)}{2^{(n-2)/2+m}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right)},$$

otteniamo

$$\mathscr{H}\{\delta^{(m)}\} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2m-1}{2}\right) s^{(n-2)/2+m}}{2^{2m+\frac{n-2}{2}+1}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2m}{2}\right)}. \tag{2,3}$$

Da questa ultima formula si ricava, per $m = 0$,

$$\mathscr{H}\{\delta\} = \frac{1}{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{(n-2)/2}$$

ovvero

$$\mathscr{H}\{\delta\} = \frac{\Omega_n}{2} \frac{1}{(2\,\Pi)^{n/2}} s^{(n-2)/2}, \tag{2,4}$$

ove Ω_n denota l'area della sfera unitaria in $\mathbf{R}^n$.

3. Dalla (2,4) si ricava (cfr. [2], formula (AI, 3; 4), p. 71), quale applicazione della formula d'inversione per la trasformazione di Hankel distribuzionale:

$$\mathscr{H}\left\{\frac{\Omega_n}{2} \frac{1}{(2\,\Pi)^{n/2}} t^{(n-2)/2}\right\} = \delta. \tag{3,1}$$

Questa può scriversi, formalmente,

$$\frac{\Omega_n}{2} \frac{s^{(n-2)/2}}{(2\,\Pi)^{n/2}} \int_0^\infty t^{(n-2)/2}\, \mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{st})\, \mathrm{d}t = \delta. \tag{3,2}$$

L'integrale che appare nel primo membro di questa formula è divergente nel senso usuale, ma la formula è valida nel senso delle distribuzioni.

La (3,2) può scriversi nella forma

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\Omega_n}{2} \frac{1}{(2\,\Pi)^{n/2}} s^{(n-2)/2} \int_0^A t^{(n-2)/2}\, \mathrm{R}_{(n-2)/2}(\sqrt{st})\, \mathrm{d}t = \delta,$$

ovvero

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\Omega_n}{(2\,\Pi)^{n/2}} A^{n/2}\, t^{(n-2)/2}\, \mathrm{J}_{n/2}(At) = \delta. \tag{3,3}$$

Il nucleo singolare nel primo membro della (3,3) appare nella teoria della sommabilità sferica dell'integrale di Fourier (cfr. [4], p. 145–197).

4. Daremo una dimostrazione diretta della formula (3,3). Denotiamo, come di consueto, con L [T] la trasformata di Laplace della distribuzione T. È ben noto che $\mathrm{L}[\delta] = 1$

$$\mathrm{K}(t, A, n) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\Omega_n}{(2\,\Pi)^{n/2}} t^{(n-2)/2} A^{n/2}\, \mathrm{J}_{n/2}(At). \tag{4,1}$$

Dal teorema di unicità per la trasformazione di Laplace distribuzionale, consegue che la (3,3) è equivalente a quest'altra:

$$\lim_{A\to\infty} \mathrm{L}[\mathrm{K}(t, A, n)] = 1. \tag{4,2}$$

Dalla formula ben nota (cfr. [5], p. 182, formula 9, ove la $P_\mu^{-\nu}$ sono le funzioni di Legendre di prima specie):

$$\int_0^\infty t^\mu J_\nu(at)\, e^{-pt}\, dt = \Gamma(\mu+\nu+1) \frac{1}{(p^2+a^2)^{\frac{\mu+1}{2}}} \cdot P_\mu^{-\nu}\left(\frac{p}{(p^2+a^2)^{1/2}}\right),$$

valida per

$$\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|,$$

otteniamo

$$\int_0^\infty t^{(n-2)/2} J_{n/2}(At)\, e^{-pt}\, dt = \Gamma(n) \frac{1}{(p^2+A^2)^{n/4}} P_{(n-2)/2}^{-n/2}\left(\frac{p}{(p^2+A^2)^{1/2}}\right),$$

valida per $A > 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, $n > -1$.

Si vede senza difficoltà che questa formula può anche scriversi

$$(4,3) \qquad \int_0^\infty e^{-pt} K(t, A, n)\, dt = \frac{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Pi^{1/2}} \cdot \frac{A^{n/2}}{(p^2+A^2)^{n/4}} \cdot P_{(n-2)/2}^{-n/2}\left(\frac{p}{(p^2+A^2)^{1/2}}\right).$$

Da questa otteniamo, per $A \to \infty$,

$$(4,4) \qquad \lim_{A\to\infty} \int_0^\infty e^{-pt} K(t, A, n)\, dt = \frac{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Pi^{1/2}} P_{(n-2)/2}^{-n/2}(0).$$

È ben noto che (cfr. [5], p. 145, formula (20) o [6], p. 232):

$$P_\nu^\mu(0) = \frac{2^\mu\, \Pi^{-1/2} \cos\left[\frac{\Pi}{2}(\mu+\nu)\right] \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)}.$$

Per $\mu = -\frac{n}{2}$, $V = \frac{n-2}{2}$, otteniamo

$$P_{(n-2)/2}^{-n/2}(0) = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Pi \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\Pi x}{2}}{\frac{\Pi x}{2}}}{\Pi^{1/2}\, 2^{n/2}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)};$$

ossia, in definitiva,

$$(4,5) \qquad P_{(n-2)/2}^{-n/2}(0) = \frac{\Pi^{1/2}}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Dalle (4,4), (4,5) consegue

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-pt} K(t, A, n) \, dt = 1; \tag{3,3}$$

e ciò dimostra la (4,2), eppertanto anche la (3,3).

BIBLIOGRAFIA

[1] ZEMANIAN A. H. (1968) – *Generalized Integral Transformations*, Interscience Publishers, New York.

[2] GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ A. (1972) – *Appendice 1 della Tesi di Susana Elena Trione*, Universidad de Buenos Aires.

[3] WATSON G. N. (1922) – *Theory of Bessel Functions*, Cambridge, The University Press.

[4] BOCHNER S. (1932) – *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig 1932.

[5] BATEMAN PROJECT (1954) – *Tables of Integral Transforms*, Vol. I, New York, McGraw Hill.

[6] HOBSON E. W. (1931) – *The theory of spherical and ellipsoidal Harmonics*, Cambridge, The University Press.