Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Lenzi, Liana Guercia

Su una generalizzazione del concetto di quasi-corpo associativo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.5, p. 311–315.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_311_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Algebra. — *Su una generalizzazione del concetto di quasi-corpo associativo.* Nota di DOMENICO LENZI e LIANA GUERCIA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this work we develop some ideas about a generalization of the concept of associative near-field ("associative quasicorpus", see [4], 382 (A6) and 392 (A8)), and show that such a structure cannot be p-singular (see [2], def. 1, p. 244).

Si ricordi (cfr. [1], p. 1114) che si dice «*quasi-anello completo sinistro*» un insieme S, dotato di due leggi di composizione interna, ovunque definite, chiamate per convenzione somma e prodotto $(+, \cdot)$, soddisfacenti alle seguenti proprietà:

a) S è un gruppo rispetto alla somma;
b) il prodotto è associativo;
c) il prodotto è distributivo a sinistra rispetto alla somma.

In modo analogo si definiscono i «*quasi-anelli completi destri*». Un «*quasi-anello completo* destro e sinistro» è detto «*bilatero*». I quasi anelli vengono anche detti «stems».

In uno stem sinistro valgono le seguenti proprietà. Comunque si scelgano x, y in S ed un intero relativo n, risulta:

1) $x \cdot 0 = 0$,
2) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$,
3) $x \cdot (n \cdot y) = n \cdot (x \cdot y)$.

Una parte non vuota A di uno stem sinistro $S(+, \cdot)$ è detta «*sottostem sinistro*» di S se le operazioni di S inducono su A una struttura di stem sinistro.

DEFINIZIONE 1. Uno stem sinistro $S(+, \cdot)$ lo diremo «*quasi-corpo associativo sinistro generalizzato*» (in breve «quasi corpo a.s.g.») se $S(\cdot)$ induce su $S - \{0\}$ una struttura di gruppo.

N. B. Dal Teorema 3 di [3] si ricava facilmente che nel caso finito, con $|S| \geq 3$, la nozione di cui sopra equivale a quella di quasi-corpo associativo sinistro.

OSSERVAZIONE 1. Si noti che l'unità u del gruppo $S - \{0\}(\cdot)$ non è necessariamente una unità per lo stem $S(+, \cdot)$ in quanto non si può affermare, in generale, che $0 \cdot u = 0$. Infatti, se si considera il quasi-corpo a.s.g. $S(+, \cdot)$, ottenuto dal gruppo $S(+)$, costituito da due elementi 0 ed u, ponendo $x \cdot y = y$ dati comunque x, y in S, si ha $0 \cdot u = u$.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1974.

Si prova facilmente che il quasi–corpo succitato, che viene detto *quasi–corpo banale*, è l'unico quasi–corpo a.s.g. dotato di assorbenti destri (1) diversi da zero. Da ciò segue subito che in un quasi–corpo a.s.g. non banale $S(+,\cdot)$ si ha $0\cdot x = 0$ per ogni x, infatti $0\cdot x$ è chiaramente un assorbente destro, onde $0\cdot x = 0$.

È anche agevole provare che uno stem sinistro S, dotato di unità parziale sinistra u rispetto ad $S - \{0\}$, è un quasi–corpo a.s.g. se ogni elemento x di $S - \{0\}$ ammette un inverso sinistro in $S - \{0\}$.

TEOREMA 1. *Uno stem sinistro* S, *con* $|S| \geq 2$, *dotato di unità parziale destra* u *rispetto ad* $S - \{0\}$, *è un quasi–corpo a.s.g. se ogni elemento* x *in* $S - \{0\}$ *ammette almeno un inverso destro in* $S - \{0\}$.

Dimostrazione. L'asserto è ovvio se lo stem ha due soli elementi. Si supponga allora S costituito da più di due elementi. In tal caso, l'unità u non è un assorbente destro; infatti, se u fosse assorbente destro, preso in S un elemento x diverso da zero, si avrebbe $x = x\cdot u = u$, il che è assurdo. Inoltre, $S - \{0\}$ è stabile rispetto al prodotto; infatti, se esistessero a, b, in $S - \{0\}$ tali che $a\cdot b = 0$, si avrebbe, con ovvio significato dei simboli,

$$u = a \cdot b \cdot b' \cdot a' = 0 \cdot (b' \cdot a') = 0 \cdot (a \cdot b) \cdot (b' \cdot a') = 0 \cdot u\,,$$

onde u verrebbe ad essere un assorbente destro, contro quanto detto. Per note caratterizzazioni dei gruppi, il teorema risulta dimostrato.

TEOREMA 2. *Un quasi–corpo a.s.g.* $S(+,\cdot)$ *è un corpo se esistono* a, b *in* S *tali che, comunque si considerino* x, y, z *in* S, *risulti*

$$(x+y)\cdot z = a\cdot x\cdot z + b\cdot y\cdot z\,.$$

Dimostrazione. Si osserva intanto che $S(+,\cdot)$ è unitario, quindi il quasi–corpo $S(+,\cdot)$ è non banale; scelti infatti, $x = y = 0$ e $z = u$ (l'unità di $S - \{0\}(\cdot)$) si ha:

$$0\cdot u = (0+0)\cdot u = (a\cdot 0)\cdot u + (b\cdot 0)\cdot u = 0\cdot u + 0\cdot u\,,\qquad \text{da cui}\quad 0\cdot u = 0.$$

Ponendo $x = z = u$ ed $y = 0$ si ha:

$$u = (u+0)\cdot u = (a\cdot u)\cdot u + (b\cdot 0)\cdot u = a\,.$$

Analogamente si prova che $b = u$. Allora $S(+,\cdot)$ risulta essere uno stem bilatero ed unitario, cioè un anello (cfr. [1], p. 1127), donde la tesi.

OSSERVAZIONE 2. Un quasi corpo a.s.g. $S(+,\cdot)$ è ovviamente privo di divisori dello zero sia a sinistra che a destra non nulli, dal momento che

(1) Un elemento k di uno stem sinistro S dicesi un assorbente destro se, per ogni a in S, si ha: $ak = k$. È immediato verificare che un elemento a di uno stem sinistro è un assorbente destro se, e soltanto se, $0\cdot a = a$.

$S - \{0\}$ è stabile rispetto al prodotto. Inoltre, se $S(+,\cdot)$ è non banale, si ha $0 \cdot x = 0$ per ogni x in S (onde zero è un divisore sinistro di se stesso); se invece $S(+,\cdot)$ è banale, si ha $0 \cdot x = x$ per ogni x di S.

Da ciò si ha immediatamente che ogni quasi–corpo a.s.g. $S(+,\cdot)$ è «*fortemente monogeno*» («strongly uniform» vedi [5], p. 270) (2), anzi, per ogni a in S, l'endomorfismo relativo al gruppo additivo $S(+)$

$$\Phi_a : x \rightarrow a \cdot x$$

è un automorfismo del gruppo additivo $S(+)$, oppure è l'endomorfismo nullo (verificandosi questa seconda alternativa solo quando $a = 0$ ed $S(+,\cdot)$ è non banale); inoltre l'applicazione avente come insieme di definizione $S - \{0\}$ e data da $a \rightarrow \Phi_a$ è chiaramente un isomorfismo del gruppo moltiplicativo $S - \{0\}(\cdot)$ sul gruppo costituito dagli automorfismi suddetti.

TEOREMA 3. *Sia $S(+,\cdot)$ un quasi–corpo a.s.g. non banale. Ogni $\Phi_a : x \rightarrow a \cdot x$ diversa dall'automorfismo identico e dall'endomorfismo nullo è priva di coincidenze non banali (cioè non esiste $x \neq 0$ tale che $a \cdot x = x$).*

Dimostrazione. Infatti se $S(+,\cdot)$ è un quasi–corpo a.s.g. non banale e Φ_a è diversa dall'endomorfismo nullo allora è $a \neq 0$; per cui, se $a \cdot x = x$ con $x \neq 0$, si ha immediatamente che $a = u$.

OSSERVAZIONE 3. Dato un qualsiasi stem sinistro $S(+,\cdot)$ con unità u, in particolare un qualsiasi quasi–corpo a.s.g. non banale, si consideri l'applicazione f dell'anello Z degli interi in S che, ad ogni intero relativo m, associa l'elemento $m \cdot u$ in S. È immediato verificare che f è un omomorfismo e che $U = f(Z)$ è un sottostem di S; anzi $f(Z)$ risulta essere un anello in quanto isomorfo all'anello Z/Ker_f. Come per il caso degli anelli, torna naturale chiamare $f(Z)$ «*il sottoanello fondamentale*» di $S(+,\cdot)$.

Si può inoltre dimostrare agevolmente che, come per il caso dei corpi, dato un quasi–corpo a.s.g. non banale $S(+,\cdot)$ l'insieme costituito dai prodotti del tipo $(m \cdot u) \cdot (n, u)^{-1}$ (con $m, n \in Z$, $n \cdot u \neq 0$ ed u unità per $S(+,\cdot)$) è un campo isomorfo al campo dei razionali oppure al campo $Z/(q)(+,\cdot)$, con q opportuno numero primo di $Z(+,\cdot)$.

TEOREMA 4. *Non esistono quasi–corpi a.s.g. p–singolari* (3).

Dimostrazione. Sia $S(+,\cdot)$ un quasi–corpo a.s.g. p–singolare. Dalla definizione discende che l'ordine di S è diverso da due; di conseguenza, $S(+,\cdot)$ è un quasi–corpo a.s.g. non banale. Allora, per il Teorema 3, ogni Φ_a (con $a \in S$) diversa dall'endomorfismo nullo e dall'identità è priva di coincidenze non banali; ne consegue, in virtù del Teorema 16 di [2], che l'ordine s di S è una potenza intera p^n (con $n > 1$).

(2) Ovvero ha almeno un elemento che non divide lo zero a sinistra (cioè è monogeno) e per ogni x di S che divide lo zero a sinistra si ha $x \cdot S = 0$ (vedi [2], p. 245).

(3) A. Ferrero chiama p–singolare uno stem sinistro finito, avente per ordine un multiplo proprio di p, che non ammette sottostems propri il cui ordine sia un multiplo di p (cfr. [2], Definizione 1, p. 244).

Si consideri ora il sottoanello fondamentale U di $S(+,\cdot)$ che, per l'Osservazione 3, risulta avere per ordine un numero primo.

Per il teorema di Lagrange, U ha per ordine un divisore di s, pertanto U ha un ordine p ed è un sottostem proprio di $S(+,\cdot)$, il che è contro l'ipotesi che S sia un quasi-corpo a.s.g. p-singolare.

TEOREMA 5. *Ogni stem sinistro p-singolare non può avere unità (bilatera) rispetto al prodotto.*

Dimostrazione. Sia per assurdo $S(+,\cdot)$ uno stem sinistro p-singolare avente unità u. Allora ogni elemento $x \in S - \{0\}$ non è divisore a sinistra dello zero; infatti $x \cdot u = x$, per cui l'endomorfismo $\Phi_x : y \to x \cdot y$ relativo ad $S(+)$ determinato da x non può essere l'endomorfismo nullo (4). Ne consegue che $S(\cdot)$ induce su $S - \{0\}$ una struttura di semigruppo unitario, con elementi semplificabili a sinistra. Essendo inoltre S finito, si ha immediatamente che tali elementi sono invertibili a destra; pertanto $S(+,\cdot)$ è un quasi-corpo associativo sinistro generalizzato, d'onde la tesi, per il teorema precedente.

Si può ora stabilire il seguente:

TEOREMA 6. *Ogni stem sinistro (destro) p-singolare è privo di elementi semplificabili a destra (a sinistra).*

Dimostrazione. Sia per assurdo $S(+,\cdot)$ uno stem p-singolare sinistro avente un elemento a semplificabile a destra. Allora, essendo $0 \cdot a = 0$ (cfr. [2], teor. 9, pag. 247), si ha che per ogni $x \in S - \{0\}$ risulta $x \cdot a \neq 0$; pertanto, essendo $S(+,\cdot)$ fortemente monogeno, x non è un divisore sinistro dello zero ed è quindi semplificabile a sinistra (5). In particolare a, chiaramente diverso da zero, risulta essere semplificabile sia a sinistra che a destra, per cui esiste un opportuno intero positivo n tale che $a^n = u$ è unità bilatera per $S(+,\cdot)$ (6). Dal teorema precedente si ottiene immediatamente la tesi.

Si può concludere col seguente teorema, da cui discende che uno stem p-singolare deve godere solo della proprietà distributiva a sinistra oppure solo della proprietà distributiva a destra.

TEOREMA 7. *Non esistono stems bilaterali p-singolari* (7).

Dimostrazione. Sia per assurdo $S(+,\cdot)$ uno stem bilatero p-singolare. Allora $S(+,\cdot)$ possiede sia una unità sinistra (ved. [2], Oss. 3, p. 245) che una unità destra, cioè $S(+,\cdot)$ ha una unità bilatera, il che è assurdo per il Teorema 5.

(4) Si rammenti che $S(+,\cdot)$ è fortemente monogeno.

(5) Si tenga presente che da $xy = xz$ discende che $xy + [-(xz)] = xy + x(-z) = x(y - z) = 0$.

(6) Ciò è conseguenza immediata del fatto che S ha ordine finito.

(7) Il che si può anche dedurre sia dal Teorema 10 (p. 1123) che dal Coroll. 14 (p. 1129), di [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FERRERO (1962–63) – *Sulla struttura aritmetica dei quasi–anelli finiti*, « Atti Acc. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. », 97, 1114–1130.

[2] G. FERRERO (1966) – *Struttura degli Stems p–singolari*, « Riv. Mat. Univ. Parma », (2) 7, 243–254.

[3] G. FERRERO (1970) – *Stems planari e BIB–Disegni*, « Riv. Mat. Univ. Parma », (2) *11*.

[4] B. SEGRE (1961) – *Lectures on modern geometry* (with an appendix by L. Lombardo Radice), Ed. Cremonese, Roma.

[5] G. SETZO (1974) – *Planar and strongly uniform near-rings*, « Proc. of Amer. Math. Soc. », *44* (2) (June 1974).