Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lamberto Cesari

Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Schauder

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.5, p. 303–307.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_303_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 novembre 1974

Presiede il Presidente della Classe Beniamino Segre

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Schauder.* Nota (*)

di Lamberto Cesari, presentata dal Socio M. Picone.

Summary. — The author considers the Schauder canonic form for quasilinear hyperbolic systems with $r-1$ independent variables $x, y_1, \cdots, y_r$, with m unknown functions $z_1, \cdots, z_m$, measurable coefficients and Lipschitzian data. Either the values of the unknowns are assigned on possibly distinct hyperplanes $x = a_i$, $0 \leq a_i \leq a$, or certain linear combinations of the unknowns are assigned on the same hyperplanes. The author states a theorem concerning the existence and uniqueness of the solutions, and their continuous dependence on the data.

1. Sistemi di Schauder e problemi ai limiti

In una Nota precedente noi prendemmo in considerazione sistemi iperbolici quasi lineari della forma canonica di Courant e Lax

$$(1) \qquad \partial z_i/\partial x + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y, z)\, \partial z_i/\partial y_k = f_i(x, y, z), \quad (x, y) \in D, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

dove $x, y = (y_1, \cdots, y_r)$ sono le $r+1$ variabili indipendenti, $r \geq 1$, dove $z = z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, $(x, y) \in D$, sono le m funzioni incognite, e ρ_{ik}, f_i sono funzioni date definite in $D \times \Omega$. Nella presente Nota noi consideriamo la forma canonica più generale di Schauder

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y, z) \left[\partial z_j/\partial x + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y, z)\, \partial z_j/\partial y_k \right] = f_i(x, y, z), \qquad (x, y) \in D, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1974.

dove ρ_{ik}, f_i sono come sopra, e $A_{ij}(x, y, z)$ sono note funzioni limitate a definite in $D \times \Omega$ con $\det [A_{ij}] \geq \mu > 0$, μ una costante. Quando $[A_{ij}(x, y, z)] = [\delta_{ij}]$, la matrice identica, $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, m$, il sistema (2) si riduce al sistema (1).

Noi prendiamo per D una regione illimitata, precisamente una lastra sottile $D = I_a \times E^r$, $I_a = [x \mid 0 \leq x \leq a]$, e Ω semplicemente denota un dato intervallo $[-\Omega, \Omega]^m \subset E^m$. Invece del problema di Cauchy usuale (coi dati sull'iperpiano $x = 0$), noi consideriamo qui, come nella Nota precedente, problemi ai limiti più generali coi dati su m iperpiani possibilmente distinti $x = a_i$, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$.

I. Siano assegnati m numeri a_i, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$, ed m funzioni $\psi_i(y)$, $y \in E^r$, $i = 1, \cdots, m$, e sia proposto il problema di determinare una soluzione $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, $(x, y) \in I_a \times E^r$, del sistema (2) tale che

$$z_i(a_i, y) = \psi_i(y) \quad , \quad y \in E^r, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{3}$$

Se $a_i = 0$, $i = 1, \cdots, m$, questo problema si riduce al problema di Cauchy. Noi consideriamo anche il problema alquanto più generale seguente:

II. Siano assegnati m numeri a_i, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$, ed $m^2 + m$ funzioni $c_{ij}(y)$, $\psi_i(y)$, $y \in E^r$, $i, j = 1, \cdots, m$, e sia proposto il problema di determinare una soluzione $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, $(x, y) \in I_a \times E^r$, del sistema (2) tale che

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(y)\, z_j(a_i, y) = \psi_i(y) \quad , \quad y \in E^r, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{4}$$

In altre parole, noi richiediamo che m combinazioni lineari distinte delle z_j abbiano valori assegnati su m dati iperpiani $x = a_i$. Questo problema (II) si riduce al problema (I) quando $[c_{ij}(y)]$ è la matrice identica $[c_{ij}] = [\delta_{ij}]$.

Problemi per sistemi iperbolici con condizioni ai limiti (II) possono essere non «ben posti» come è stato mostrato con esempi. Tuttavia noi abbiamo potuto dimostrare un teorema di esistenza, di unicità, e di dipendenza continua dai dati per sistemi di Schauder (2) in cui entrambe le matrici $[A_{ij}(x, y, z)]$ e $[c_{ij}(y)]$ hanno « diagonale principale dominante » nel senso che verrà indicato più sotto.

Poniamo $c_{ij}(y) = \delta_{ij} + \tilde{c}_{ij}(y)$, $i, j = 1, \cdots, m$, e sia

$$\sigma_0 = \operatorname*{Max}_{i=1,\cdots,m} \ \operatorname*{Sup}_{y \in E^r} \sum_{j=1}^{m} |\tilde{c}_{ij}(y)| , \tag{5}$$

così che $\sigma_0 \geq 0$, $\sigma_0 = 0$ quando $[c_{ij}]$ è la matrice identica, e σ_0 è tanto più piccolo quanto più la matrice $[c_{ij}(y)]$ è vicina alla matrice identica.

Per quanto riguarda la matrice $[A_{ij}(x, y, z)]$ indichiamo con $\alpha_{ij}(x, y, z)$ il complemento algebrico di A_{ij} diviso per $\det [A_{ij}]$, cioè, $\alpha_{ij} = (A^{-1})_{ji}$, e poniamo

$$A_{ij}(x, y, z) = \delta_{ij} + \tilde{A}_{ij}(x, y, z) \quad , \quad \alpha_{ij}(x, y, z) = \delta_{ij} + \tilde{\alpha}_{ij}(x, y, z).$$

Siano ora

$$\sigma_1 = \operatorname*{Max}_{i=1,\cdots,m} \ \operatorname*{Sup}_{(x,y,z)\in D\times\Omega} \sum_{h=1}^{m} |\tilde{A}_{ih}(x, y, z)|,$$

(6) $$\sigma_2 = \operatorname*{Max}_{i=1,\cdots,m} \ \operatorname*{Sup}_{(x,y,z)\in D\times\Omega} \sum_{h=1}^{m} |\tilde{\alpha}_{hi}(x, y, z)|,$$

$$\sigma_3 = \operatorname*{Max}_{i=1,\cdots,m} \ \operatorname*{Sup}_{(x,y,z)\in D\times\Omega} \sum_{s=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} |\tilde{\alpha}_{si}(x, y, z)| \, |\tilde{A}_{sh}(x, y, z)|,$$

e poniamo anche

(7) $$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 .$$

Pertanto, $\sigma \geq 0$, $\sigma = 0$ quando $[A_{ij}]$ è la matrice identica, e σ è tanto più piccolo quanto più la matrice $[A_{ij}(x, y, z)]$ è vicina alla matrice identica.

Nel teorema di esistenza, unicità, e dipendenza continua che enunciamo, noi richiederemo che

(8) $$\sigma + \sigma_0 + \sigma\sigma_0 < 1 .$$

Con queste notazioni, se $[A_{ij}]$ è la matrice identica (sistema (1)), allora $\sigma = 0$, e quanto chiediamo è che $\sigma_0 < 1$. Questo è il risultato della nota precedente. Se invece $[c_{ij}]$ è la matrice identica (problema ai limiti (I)), allora $\sigma_0 = 0$, e quanto chiediamo è che $\sigma < 1$.

2. ENUNCIATO DEL TEOREMA DI ESISTENZA

Siano $a_0 > 0$, $\Omega > 0$ costanti date, e indichiamo con I_{a_0}, Ω gli intervalli $I_{a_0} = [x \mid 0 \leq x \leq a_0] \subset E^1$, e $\Omega = [-\Omega, \Omega]^m \subset E^m$.

IL TEOREMA DI ESISTENZA. *Siano* $A_{ij}(x, y, z)$, $i, j = 1, \cdots, m$, *date funzioni continue in* $I_{a_0} \times E^r \times \Omega$ *con det* $[A_{ij}] \geq \mu > 0$, μ *una costante, ed esistano costanti* $H, C > 0$ *e una funzione* $\mathfrak{m}(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq a_0$, $\mathfrak{m} \in L_1[0, a_0]$, *tali che per tutti gli* (x, y, z), $(x, \bar{y}, \bar{z})$, $(\bar{x}, y, z) \in I_{a_0} \times E^r \times \Omega$ *e tutti gli* $i, j = 1, \cdots, m$, *si abbia*

$$|A_{ij}(x, y, z)| \leq H,$$

$$|A_{ij}(x, y, z) - A_{ij}(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq C\,[|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|],$$

$$|A_{ij}(x, y, z) - A_{ij}(\bar{x}, y, z)| \leq \left| \int_x^{\bar{x}} \mathfrak{m}(\alpha)\, d\alpha \right|.$$

Se $\alpha_{ij}(x, y, z)$ *denota il complemento algebrico di* A_{ij} *nella matrice* $[A_{ij}]$ *diviso per det* $[A_{ij}]$, *cioè* $\alpha_{ij} = (A^{-1})_{ji}$, *allora certamente esistono costanti*

$H', C' > 0$ *e una funzione* $\mathring{m}'(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq a_0$, $\mathring{m}' \in L_1[0, a_0]$, *tali che, come sopra,*

$$|\alpha_{ij}(x, y, z)| \leq H',$$

$$|\alpha_{ij}(x, y, z) - \alpha_{ij}(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq C'[|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|],$$

$$|\alpha_{ij}(x, y, z) - \alpha_{ij}(\bar{x}, y, z)| \leq \left| \int_x^{\bar{x}} \mathring{m}'(\alpha)\, d\alpha \right|.$$

Siano $\rho_{ij}(x, y, z)$, $f_i(x, y, z)$, $i = 1, \cdots, m$, $k = 1, \cdots, r$, *date funzioni definite in* $I_{a_0} \times E^r \times \Omega$, *misurabili in* x *per ogni* (y, z), *continue in* (y, z) *per ogni* x, *ed esistano funzioni non negative* $m(x)$, $l(x)$, $n(x)$, $l_1(x)$, $0 \leq x \leq a_0$, $m, l, n, l_1 \in L_1[0, a_0]$, *tali che, per tutti gli* (x, y, z), $(x, \bar{y}, \bar{z}) \in I_{a_0} \times E^r \times \Omega$, $i = 1, \cdots, m$, $k = 1, \cdots, r$, *si abbia*

$$|\rho_{ik}(x, y, z)| \leq m(x) \quad , \quad |f_i(x, y, z)| \leq n(x),$$

$$|\rho_{ik}(x, y, z) - \rho_{ik}(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq l(x)[|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|],$$

$$|f_i(x, y, z) - f_i(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq l_1(x)[|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|].$$

Siano $\psi_i(y)$, $c_{ij}(y)$, $y \in E^r$, $i, j = 1, \cdots, m$, *date funzioni limitate e continue in* E^r, *ed esistano costanti* $\omega_0, \Gamma_0, \Lambda_0, \tau_0$, $0 \leq \omega_0 < \Omega$, $\Lambda_0, \tau_0 \geq 0$, *tali che, per tutti gli* $y, \bar{y} \in E^r$ e $i = 1, \cdots, m$, *si abbia*

$$|\psi_i(y)| \leq \omega_0 \quad , \quad |\psi_i(y) - \psi_i(\bar{y})| \leq \Lambda_0 |y - \bar{y}|,$$

$$|c_{ij}(y)| \leq \Gamma_0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}(y) - c_{ij}(\bar{y})| \leq \tau_0 |y - \bar{y}|.$$

Usando le notazioni (5), (6), (7) (*con* $a = a_0$) *assumiamo anche che* $\sigma + \sigma_0 + \sigma\sigma_0 < 1$, *così che* $H \leq 1 + \sigma$, $H' < 1 + \sigma$, $\Gamma_0 \leq 1 + \sigma$.

Allora, per $a, \omega_0, \tau_0, C, C'$ *sufficentemente piccoli*, $0 < a \leq a_0$, $\omega_0, \tau_0, C, C' > 0$, *e per ogni sistema di numeri* a_i, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$, *esistono una costante* $Q > 0$, *una funzione* $\chi(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq a$, $\chi \in L_1[0, a]$, *e funzioni* $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, $(x, y) \in I_a \times E^r$, *continue in* $I_a \times E^r$, *che soddisfano* (4) *dappertutto in* E^r, *che soddisfano* (2) q.d. *in* $I_a \times E^r$, *e tali che, per tutti gli* (x, y), $(x, \bar{y})$, $(\bar{x}, y) \in I_a \times E^r$, $i = 1, \cdots, m$, *risulti*

$$|z_i(x, y)| \leq \Omega \quad , \quad |z_i(x, y) - z_i(x, \bar{y})| \leq Q |y - \bar{y}|,$$

$$|z_i(x, y) - z_i(\bar{x}, y)| \leq \left| \int_x^{\bar{x}} \chi(\alpha)\, d\alpha \right|.$$

La funzione vettore $z(x, y)$ è unica e dipende con continuità da $\psi(y) = (\psi_1, \cdots, \psi_m)$ per z e ψ in classi che sono descritte dettagliatamente in [2] con dimostrazioni complete. Anche diamo in [2] stime, che possono essere calcolate, dei numeri a, ω_0, C, C', τ_0, che dipendono solo dalle costanti Ω, Λ_0, σ, σ_0, e dalle funzioni $\mathring{m}$, $\mathring{m}'$, m, n, l, l_1, ma non dai numeri a_i, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$.

Per le applicazioni è importante rilevare che se tutti i dati $A_{ij}(x, y, z)$, $\rho_{ik}(x, y, z)$, $f_i(x, y, z)$, $\psi_i(y)$, $c_{ij}(y)$ sono funzioni periodiche in ciascuna variabile y_s di un dato periodo T_s, $s = 1, \cdots, r$, allora la soluzione $z(x, y)$, di cui si mostra l'esistenza e l'unicità, è anche periodica in ciascuna variabile y_s dello stesso periodo T_s, $s = 1, \cdots, r$.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CESARI – *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems*, « Rend. Mat. Univ. Parma », To appear.

[2] L. CESARI – *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Schauder's canonic form*, « Annali Scuola Normale Sup. Pisa », To appear.

[3] R. COURANT and P. LAX, *On nonlinear partial differential equations with two independent variables*, « Comm. Pure Appl. Math. », *2*, 255–273, 1949.

[4] H. LEWY, *Ueber das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhaengigen Veraenderlichen*, « Math. Ann. », *97*, 179–191, 1927.

[5] O. NICCOLETTI, *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*, « Atti Accad. Scienze Torino », *33*, 746–759, 1897.

[6] J. SCHAUDER *Cauchy'sches Problem fuer partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbetraege der Loesungen beziehenden Abschaetzungen*, « Comment. Math. Helv. », *9*, 263–283, 1937.