Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rolf Berndt

Über die Spur arithmetisch ganzer Differentiale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.3-4, p. 159–165.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_3-4_159_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Analisi matematica. — *Über die Spur arithmetisch ganzer Differentiale*. Nota (*) di ROLF BERNDT, presentata dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Nella fondamentale Memoria [1], E. Kähler ha iniziato lo studio dei differenziali integri di un corpo, su cui il presente Autore è ritornato in due recenti lavori. In questa Nota si mostra l'interezza della traccia di un differenziale integro sia nel senso di Kähler che in quello di Néron.

1. An [2] anschliessend seien einige Bezeichnungen und Definitionen zusammengestellt:

K und K_0 seien über einem noetherschen regulären Ring A endlich erzeugbare Körper vom Transzendenzgrad r über (A) (runde Klammern bezeichnen Körper–, eckige Ringerzeugung).

Alle im Folgenden auftretenden Ringe werden als Lokalisierungen über A endlich erzeugter Ringe angenommen. Für einen solchen Unterring C von K bezeichne $\Omega^1_{C/A}$ den Differentialmodul von C über A. Im Falle, dass K der Quotientenkörper von C ist, unter φ den Kanonischen Homomorphismus

$$\varphi : \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/A} \otimes_C K = \Omega^1_{K/A}$$

verstanden, bezeichne

$CdC = \varphi(\Omega^1_{C/A})$ den von allen adb, a, $b \in C$ in $\Omega^1_{K/A}$ erzeugten Untermodul.

Ist C_0 ein A enthaltender Unterring von C, besteht die exakte Folge (s. etwa [4] O_{IV} 20.5.7.1)

$$(*) \qquad \Omega^1_{C_0/A} \otimes_{C_0} C \xrightarrow{v} \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/C_0} \to 0.$$

Dann bezeichne $C.\,\Omega^1_{C_0/A}$ hier $v(\Omega^1_{C_0/A} \otimes_{C_0} C)$, also den von allen adb, $a \in C_0$, $b \in C_0$ in $\Omega^1_{C/A}$ erzeugten C–Untermodul und $CdC_0 = \varphi(C.\,\Omega^1_{C_0/A})$, den von allen adb, $a \in C$, $b \in C_0$ in $\Omega^1_{K/A}$ erzeugten C–Untermodul. $\Omega_{C/A}$, [CdC] sowie [CdC_0] bezeichnen die graduierten äusseren Ringe zu $\Omega^1_{C/A}$, CdC sowie CdC_0.

Es sei

$$\Omega^1_{C/A} = \overline{\Omega}^1/N$$

mit einem freien Modul

$$\overline{\Omega}^1 = \sum_{i=1}^{n} CU_i$$

und einem Relationenmodul

$$N = \sum_{j=1}^{t} Cw_j .$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1974.

Dann ist

$$\Omega^1_{K/A} = \sum_{i=1}^{n} K u_i = \sum_{i=1}^{n} K U_i \Big/ \sum_{j=1}^{t} K w_j .$$

Die h–te *Differente* $\mathfrak{d}_h(C/A)$ von C über A wird definiert als das von den Koeffizienten bezüglich $U_{i_1} \wedge \cdots \wedge U_{i_{n-h}}$ der Produkte

$$w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_{n-h}} \qquad 1 \leq j \leq t$$

erzeugte Ideal in C. $\mathrm{Trgr}_{(A)} K = r$ bedingt, wenn K über (A) separabel ist

$$\mathfrak{d}_h\left(\frac{C}{A}\right) = 0 \qquad \text{für } h < r$$

$$\neq 0 \qquad \text{für } h = r .$$

Für

$$\omega = \Sigma a_{i_1 \ldots i_h} u_{i_1} \wedge \cdots\cdots \wedge u_{i_h} \in \Omega_{K/A}$$

wird gesetzt

$$\overline{\omega} = \Sigma a_{i_1 \ldots i_h} U_{i_1} \wedge \cdots \wedge U_{i_h}$$

und als *Differente* $\mathfrak{d}\left(\omega \mid \frac{C}{A}\right)$ *von* ω *in* C *über* A wird der von den Koeffizienten bezüglich $U_{i_1} \wedge \cdots \wedge U_{i_{h+n-r}}$ der Produkte

$$\overline{\omega} \wedge w_{j_i} \wedge \cdots \wedge w_{j_{n-r}} \qquad 1 \leq j \leq t$$

erzeugte C–modul definiert. Wie bekannt, ist $\mathfrak{d}_h(C/A)$ durch C und A und, wie in [3] gezeigt, ist $\mathfrak{d}\left(\omega \mid \frac{C}{A}\right)$ durch ω, C und A eindeutig bestimmt, also insbesondere unabhängig von der Auswahl der Erzeugenden des Relationenmoduls.

Als Differentialintegritäten oder Modul D (K/A) der *arithmetisch ganzen* und Modul $D\left(\frac{K}{\mathfrak{d} \mid A}\right)$ der *modifizierten arithmetisch ganzen* Differentiale werden definiert

$$D\left(\frac{K}{A}\right) = \bigcap_{S \in V(K/A)} [SdS] = \left\{\omega \in \Omega_{K/A} \mid \omega \in [SdS] \qquad \text{für alle} \quad S \in V\left(\frac{K}{A}\right)\right\}$$

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{d} \mid A}\right) = \left\{\omega \in \Omega_{K/A} \mid \mathfrak{d}\left(\omega \mid \frac{S}{A}\right) \subset S \qquad \text{für alle} \quad S \in V\left(\frac{K}{A}\right)\right\} ,$$

wobei V (K/A) die Gesamtheit der diskreten Bewertungsringe vom Rang 1 von K bezeichnet, die nach der anfangs gemachten Voraussetzung Lokalisierungen über A endlich erzeugter Ringe sind.

2. Aus den im Folgenden angenommenen Voraussetzungen, K sowie K_0 seien vom Transzendenzgrad r und separabel über (A) und K sei separabel über K_0, folgt, dass angenommen werden kann

$$\Omega^1_{K_0/A} = \sum_{i=1}^{r} K_0 u_i \hookrightarrow \Omega^1_{K/A} = \sum_{i=1}^{r} K u_i$$

(s. etwa [4] O_{IV} 20.6.3). $\omega \in \Omega_{K/A}$ kann deshalb in der Gestalt

$$(*) \qquad \omega = \sum_{i \leq r} a_{i_1 \cdots i_h} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_h}$$

angenommen werden. Als *Spur* $T_{K/K_0}\,\omega$ von ω wird dann definiert

$$T_{K/K_0}\,\omega = \Sigma\,(T_{K/K_0}\, a_{i_1 \cdots i_h})\, u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_h}.$$

Statt T_{K/K_0} wird im Folgenden einfach T geschrieben.

$T\omega$ ist Element von $\Omega_{K_0/A}$ und unabhängig von der Darstellungsweise von ω. Denn sei $u'_1, \cdots, u'_r$ eine zweite Basis von $\Omega^1_{K_0/A}$ und damit $\Omega^1_{K/A}$, also

$$u_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}\, u'_j \quad , \quad b_{ij} \in K_0 \,,\ \det(b_{ij}) \neq 0.$$

Dann folgt

$$\omega = \Sigma\, a'_{j_1 \cdots j_h} u'_{j_1} \wedge \cdots \wedge u'_{j_h}$$

mit

$$a'_{j_1 \cdots j_h} = \sum_i a_{i_1 \cdots i_h} \prod_{\nu=1}^{h} b_{i_\nu j_\nu},$$

also wegen der Additivität von T für Elemente aus K

$$\begin{aligned} T\omega &= \sum_j T a'_{j_1 \cdots j_h} u'_{j_1} \wedge \cdots \wedge u'_{j_h} \\ &= \sum_j \sum_i (T a_{i_1 \cdots i_h}) \prod_\nu b_{i_\nu j_\nu} u'_{j_1} \wedge \cdots \wedge u'_{j_h} \\ &= \sum_i T a_{i_1 \cdots i_h} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_h}. \end{aligned}$$

Im Folgenden soll nun bewiesen werden:

SATZ 1. *Für* $\omega \in D\left(\frac{K}{A}\right)$ *ist* $T\omega \in D\left(\frac{K_0}{A}\right)$

SATZ 2. *Für* $\omega \in D\left(\frac{K}{\mathfrak{d} \mid A}\right)$ *ist* $T\omega \in D\left(\frac{K_0}{\mathfrak{d} \mid A}\right)$.

Dem Beweis werden noch einige Hilfssätze vorangestellt:

3. LEMMA 1. *Es seien*

S_0^* *ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper* $K_0^* = (S_0^*)$,

K_i^* *eine endlich separable Erweiterung von* K_0^*,

S_i^* *der zur Fortsetzung der Bewertung auf* K_i^* *gehörige Bewertungsring,*

x *ein Element von* K_i^*.

Dann ist gleichbedeutend

$$T_{K_i^*/K_0^*}\, x S_i^* \subset S_0^* \quad \textit{und} \quad x\mathfrak{d}_0\left(\frac{S_i^*}{S_0^*}\right) \subset S_i^*.$$

Beweis. Nach Berger [5], p. 34 ist

$$\mathfrak{k}_0\left(\frac{S_i}{S_0}\right) = \mathfrak{D}\left(\frac{S_i}{S_0}\right)$$

mit der Dedekindschen Differente $\mathfrak{D}$. Für diese aber gilt (s. etwa Serre [6], p. 60)

$$T\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \text{ ist gleichbedeutend mit } \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{D}(B/A)^{-1}$$

$$\text{und deswegen auch mit } \mathfrak{D}(B/A)\,\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}B;$$

wobei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K_0^*, B der ganze Abschluss von A in K^*, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gebrochene Ideale von K_0^* bzw. K^* bezüglich A bzw. B sind. Daraus folgt mit $A = \mathfrak{a} = S_0^*$, $B = S_i^*$ und $\mathfrak{b} = xS_i^*$ die Behauptung (S_i^* ist der ganze Abschluss von S_0^* in K_i^* wie etwa aus Hasse [7], p. 76 entnommen werden kann).

4. LEMMA 2. *Es seien*

K *über* K_0 *endlich und separabel*,

S_0 *ein diskreter Bewertungsring von* K_0,

S_i $(i = 1, \cdots, g)$ *alle Bewertungsringe von* K, *die* S_0 *dominieren*,

x *ein Element von* K.

Aus

$$x\mathfrak{d}_0\left(\frac{S_i}{S_0}\right) \subset S_i \qquad \textit{für} \quad i = 1, \cdots, g$$

folgt dann

$$T_{K/K_0}\, x \in S_0 .$$

Beweis. Für $x \in K$ gilt (s. etwa [6], p. 41)

$$T_{K/K_0}\, x = \sum_{i=1}^{g} T_{(S_i^*/S_0^*)}\, x$$

wobei S_0^* und S_i^* die Vervollständigungen von S_0 und S_i bezeichnen. Nach [5], p. 33 ist

$$\mathfrak{d}_0\left(\frac{S_i^*}{S_0^*}\right) = \mathfrak{d}_0\left(\frac{S_i}{S_0}\right) S_i^* .$$

Aus

$$x\mathfrak{d}_0\left(\frac{S_i}{S_0}\right) \subset S_i$$

folgt also

$$x\mathfrak{d}_0\left(\frac{S_i^*}{S_0^*}\right) \subset S_i^* .$$

Nach dem Lemma 1 ist das mit

$$T_{(S_i^*/S_0^*)}\, xS_i^* \subset S_0^*$$

gleichbedeutend. Damit ist gezeigt

$$T_{K/K_0}\, x = \sum_{i=1}^{g} T_{(S_i^*/S_0^*)}\, x \in S_0^* \cap K_0 = S_0 .$$

5. Es seien wieder

K über K_0 endlich und separabel,

K_0 über (A) separabel vom Transzendenzgrad r,

S_0 diskreter Bewertungsring von K_0,

S diskreter Bewertungsring von K, der S_0 dominiert.

Da S und S_0 als diskrete Bewertungsringe Hauptidealringe sind, kann angenommen werden

$$\Omega^1_{S_0/A} = \sum_{i=1}^{r+t} S_0\, U_i/N_0 \quad , \quad N_0 = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i\, U_{r+i}\, S_0$$

$$\Omega^1_{S/S_0} = \sum_{j=1}^{l} S\; V_i/N_1 \quad , \quad N_1 = \sum_{j=1}^{l} \beta_j\, V_j\, S$$

mit

$$(*) \qquad \mathfrak{d}_0\left(\frac{S}{S_0}\right) = \prod_{j=1}^{l} \beta_j S \neq 0$$

(auf Grund der Endlichkeit und Separabilität von K über K_0) und

$$(**) \qquad \mathfrak{d}_r\left(\frac{S_0}{A}\right) = \prod_{i=1}^{t} \alpha_i\, S_0$$

(s. 1.). Weiter ist der in 1. erklärte S–Modul

$$S \cdot \Omega^1_{S_0} = \sum_{i=1}^{r+t} S U_i/N'$$

mit $N_0 \subset N'$. Nach (*) in 1. ist dann

$$\Omega^1_{S/A} = \sum_{i=1}^{r+t} S U_i + \sum_{j=1}^{l} S V_j/N$$

mit

$$N = N' + \sum_{j=1}^{l}\left(\beta_j V_j + \sum_{i=1}^{r+t} \gamma_{ji}\, U_i\right) S$$

(denn jedes Element von $\Omega^1_{S/A}$ kann als Summe eines Elements von S. $\Omega^1_{S_0/A}$ und eines Vertreters einer Restklasse aus Ω^1_{S/S_0} geschrieben werden. Alle in $\Omega^1_{S/A}$ bestehenden Relationen sind also Folge der für die Elemente von S. $\Omega^1_{S_0/A}$ bestehenden sowie der für die Vertreter v_j von $V_j + N'$ bestehenden Relationen $\beta_j v_j \in S.\ \Omega^1_{S_0/A}$). Wenn u_i das Bild von $U_i + N_0 \in \Omega^1_{S_0/A}$ bei dem kanonischen Homomorphismus

$$\varphi_0 : \Omega^1_{S_0/A} \to \Omega^1_{S_0/A} \otimes_{S_0} K_0 = \Omega^1_{K_0/A}$$

bezeichnet, ist

$$\Omega^1_{K_0/A} = \sum_{i=1}^{r} K_0 \, u_i$$

und wie in 2. bemerkt.

$$\Omega^1_{K/A} = \sum_{i=1}^{r} K u_i \, .$$

6. *Beweis von Satz 1.* Unter den in 2. genannten und in 5. wiederholten Voraussetzungen seien S_i $(i = 1, \cdots, g)$ die Bewertungsringe von K, die einen vorgegebenen Bewertungsring S_0 von K_0 dominieren. Die Differentialmoduln von S_0, S, K_0 und K werden im folgenden in der in 5. eben beschriebenen Form angenommen.

Aus

$$\omega = \sum_{i \leq r} a_{i_1, \cdots, i_h} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_h} \in D\left(\frac{K}{A}\right)$$

folgt für $i = 1, \cdots, g$

$$\omega \in [S_i \, dS_i]_h$$

und deshalb nach [1], 361.

$$\omega \mathfrak{d}_0 \left(\frac{S_i}{S_0}\right) \subset [S_i \, dS_0]_h = \Sigma S_i \, u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_h}$$

also

$$a_{i_1, \cdots, i_h} \mathfrak{d}_0 \left(\frac{S_i}{S_0}\right) \subset S_i \, .$$

Das aber besagt nach Lemma 2

$$T a_{i_1, \cdots, i_h} \in S_0$$

und somit, wie zu zeigen war,

$$T\omega = \Sigma T a_{i_1, \cdots, i_h} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_h} \in [S_0 \, dS_0].$$

7. *Beweis von Satz 2.* S sei einer der Bewertungsringe S_i $(i = 1, \cdots, g)$, von K, die einen vorgegebenen Bewertungsring S_0 von K_0 dominieren. Aus

$$\omega = \sum_{i \leq r} a_{i_1, \cdots, i_h} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_h} \in D\left(\frac{K}{\mathfrak{d} \mid A}\right)$$

folgt

$$\mathfrak{d}\left(\omega \mid \frac{S}{A}\right) \subset S \, .$$

Wieder 5. zugrundelegend, bedeutet das, alle Koeffizienten bezüglich der Produkte der U_i, V_j von

$$\overline{\omega} \wedge w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_{t+l}} \quad , \quad w_j \in N.$$

sind in S. Da wegen $N_0 \subset N'$ für $i = 1, \cdots, t$ $\alpha_i U_{r+i} \in N$ gilt, sind demnach die Koeffizienten von

$$\overline{\omega} \wedge \alpha_1 U_{r+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_t U_{r+t} \wedge (\beta_1 V_1 + \Sigma \gamma_{1j} U_j) \wedge \cdots \wedge (\beta_1 V_l + \Sigma \gamma_{lj} U_j)$$

in S, also insbesondere der Koeffizient von

$$U_{i_1} \wedge \cdots \wedge U_{i_h} \wedge U_{r+1} \wedge \cdots \wedge U_{r+t} \wedge V_1 \wedge \cdots \wedge V_l ,$$

nämlich

$$a_{i_1,\cdots,i_h} \prod_{i=1}^{t} \alpha_i \prod_{j=1}^{1} \beta_j \in S.$$

Lemma 2 lässt dann wieder

$$T\,(a_{i_1,\cdots,i_h} \Pi\, \alpha_i) \subset S_0$$

schliessen. Da $\Pi \alpha_i$ Element von S_0 ist und nach (**) in 5. $\mathfrak{d}_r\,(S_0/A)$ erzeugt, gilt sogar

$$\Pi \alpha_i \, T a_{i_1,\cdots,i_h} S_0 = \mathfrak{d}_r \left(\frac{S_0}{A}\right) T a_{i_1,\cdots,i_h} \subset S_0$$

und

$$\left(T\omega \mid \frac{S_0}{A}\right) \subset S_0 .$$

was zu zeigen war.

LITERATUR

[1] E. KÄHLER (1958) – *Geometria aritmetica*, « Ann. di Matematica » (4), *45*, 1–399.

[2] R. BERNDT (1974) – *Zur Kennzeichung minimaler Modelle mit Hilfe der Differente eines Differentials*, « Abh. Math. Sem. Hamburg », im Druck.

[3] R. BERNDT (1974) – *Die Differente eines Differentials*, « Abh. Math. Sem. Hamburg », in Druck.

[4] A. GROTHENDIECK (1964) – *Élements de Géométrie Algébrique*, « Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. », *20*.

[5] R. BERGER (1960) – *Über verschiedene Differentenbegriffe*, Heidelberger Ber. 3–44.

[6] J.-P. SERRE (1962) – *Corps Locaux*, Hermann, Paris.

[7] H. HASSE (1963) – *Zahlentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin.