Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aurel Bejancu

Sur les variétés munies d'une structure algébrique

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.1-2, p. 90–94.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_1-2_90_0>

Geometria differenziale. — *Sur les variétés munies d'une structure algébrique.* Nota (*) di AUREL BEJANCU, presentata dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si assegnano condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una struttura di gruppo o di cappio (loop) di Lie–Banach su di una varietà di Banach.

Nous nous proposons dans cette Note d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une structure de groupe de Lie–Banach ou de « loop » de Lie–Banach sur une variété de Banach.

Soit B une C^{∞}–variété de Banach et $L(TB\,;TB) = \bigcup\limits_{(x,y)\in B\times B} L(T_x B\,;T_y B)$. On sait [2] que L (TB ; TB) est un fibré vectoriel sur $B\times B$. Supposons que ce fibré possède une C^{∞}–section globale F, telle que

$$F(x\,,y)\in L_{is}(T_x B\,;T_y B) \quad , \quad \forall (x\,,y)\in B\times B\,.$$

Soient M et N deux parties de B.

DÉFINITION 1. L'équation différentielle sur B

$$T_x y = F(x\,,y), \qquad (x\,,y)\in B\times B\,, \tag{1}$$

est intégrable sur $M\times N$ si pour tout $(x_0\,,y_0)\in M\times N$ il existe un C^{∞}–difféomorphisme $f: B\to B$ tel que $f(x_0)=y_0$ et

$$T_x f = F(x\,,f(x)) \quad \forall x\in B\,.$$

L'application f s'appelle la solution de l'équation différentielle (1) avec les données initiales $(x_0\,,y_0)$.

THÉORÈME 1 (d'unicité). *Si la variété* B *est connexe et l'équation différentielle* (1) *est intégrable sur* $\{x_0\}\times B$, *alors la solution avec les données initiales fixées est unique.*

Démonstration. Soient f et g deux solutions de l'équation (1) ayant les mêmes données initiales $(x_0\,,y_0)$. Nous désignons par $D = \{x\in B\,;f(x) = g(x)\}$. Les applications f et g sont continues, B est un espace de Hausdorff, donc D est fermée dans B. Soient $y_* \in D$ et h la solution de (1) avec les données initiales $(x_0\,,y_*)$. Les applications $y_1 = f\circ h$ et $y_2 = g\circ h$ sont des solutions pour l'équation différentielle

$$T_x y = F(h(x)\,,y)\circ F(x\,,h(x))\,.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1974.

Soit (U, φ) (resp. (V, ψ)) une carte locale dans x_0 (resp. $f(y_*)$). Nous désignons par y_{1UV}, y_{2UV} les images locales des solutions y_1, y_2 dans ces cartes et par F_U la partie principale [4] de la section F das la carte (U, φ) Les applications y_{1UV} et y_{2UV} sont des solutions pour l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F_U(h_{UW}(x), y) \circ F_U(x, h_{UW}(x)) \qquad (x, y) \in \varphi(U) \times \varphi(V), \tag{2}$$

où W est le domaine d'une carte locale dans y_*. Mais $y_1(x_0) = f(y_*) = g(y_*) = y_2(x_0)$. En tenant compte de l'unicité de la solution de l'équation (2), on déduit qu'il existe un voisinage A de x_0 tel que $y_{1|A} = y_{2|A}$. Donc $C = h(A)$ est un voisinage de y_* tel que $f_{|C} = g_{|C}$ et D est alors un ouvert de B. Mais B est connexe, donc $D = B$, *q.e.d.*

Soient B une variété parallélisable et « e » un point fixé dans B. Le fibré vectoriel $L(TB; T_e B) = \bigcup_{x \in B} L(T_x B; T_e B)$ possède une C^∞–section globale ω telle que $\omega(x) \in L_{is}(T_x B; T_e B)$. Nous dirons dans ce cas que B possède un parallélisme absolu ω.

THÉORÈME 2. *Une variété de Banach connexe est un groupe de Lie–Banach avec l'unité « e » si, et seulement si, sont vérifiées les conditions suivantes*:

1) B *possède un parallélisme absolu* ω,
2) *l'équation différentielle sur* B

$$T_x y = \omega^{-1}(y) \circ \omega(x), \tag{3}$$

est intégrable sur $\{e\} \times B$.

Démonstration. Si B est un groupe de Lie–Banach, alors on sait [1] que B est une variété parallélisable. Le parallélisme absolu ω est défini par la relation

$$\omega(x) = T_x L_{x^{-1}} \qquad \forall x \in B.$$

Il est aisé de voir que $y = L_x$ (la translation à gauche déterminée par $x \in B$) est une solution de (3) avec les données initiales (e, x).

Rèciproquement, si B vérifie les conditions du théorème, on désigne par L_x la solution de (3) avec les données initiales (e, x). En tenant compte de théorème d'unicité, on déduit que l'application

$$\pi : B \times V \to B \quad ; \quad \pi(x, y) = L_x(y) \quad , \quad \forall (x, y) \in B \times B,$$

est bien définie. On a: $\pi(x, e) = L_x(e) = x$ et $\pi(x, x_*) = e$, où $x_* = (L_x)^{-1}(e)$. L'application $L_x \circ L_y$ est une solution de (3) avec les données initiales $(e, \pi(x, y))$. En effet, on *a*:

$$T_z(L_x \circ L_y) = \omega^{-1}(\pi(x, \pi(y, z))) \circ \omega(\pi(y, z)) \circ \omega^{-1}(\pi(y, z)) \circ \omega(z) = \\ = \omega^{-1}((L_x \circ L_y)(z)) \circ \omega(z).$$

Donc $L_x \circ L_y = L_{\pi(x,y)}$, c'est-à-dire la loi de composition π est associative. Soit (U, φ) une carte locale dans $e \in B$. L'application $L_{x|U}$ est une soluti onde l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \omega_U^{-1}(y) \circ \omega_U(x),$$

et on déduit que π est différentiable de classe C^∞ en (e, e). Mais L_x est différentiable de classe C^∞ pour tout $x \in B$, donc π est différentiable de classe C^∞ sur $B \times B$, *q.e.d.*

On sait [5] que l'ensemble des C^r-difféomorphismes d'une variété compacte possède une structure de groupe de Lie local Fréchet et une structure de variété de Banach. À l'aide du Théorème 2, on trouve un exemple de variété compacte B telle que $\mathrm{Diff.}^r(B)$ est un groupe de Lie-Banach.

Soit G un groupe de Lie compact. On désigne par π la loi de composition sur G, et on défini sur $\mathrm{Diff.}^r(G)$ la loi de composition

$$(\gamma(f, g))(x) = \pi(f(x), g(x)), \qquad \forall f, g \in \mathrm{Diff.}^r(G) \quad , \quad x \in G.$$

En tenant compte de Théorème 2, on déduit le

THÉORÈME 3. *L'ensembe des C^r-difféomorphismes d'un groupe de Lie compact est un groupe de Lie-Banach,*

Un ensemble B, qui possède une loi de composition π avec un élément unité e, et tel que les équations

$$\pi(a, x) = b \quad ; \quad \pi(y, a) = b \tag{4}$$

ont des solutions uniques $x = \pi(a, b)$, $y = \lambda(b, a)$, est un « loop ».

DÉFINITION 2. Un loop de Lie-Banach est une C^∞-variété de Banach B munie d'une structure de « loop », telle que les applications π, λ, μ sont différentiables de classe C^∞.

Soient H une section globale dans le fibré vectoriel $L(TB; TB)$, $H(x, y) \in L_{is}(T_x B; T_y B)$ et

$$T_x y = H(x, y) \quad , \quad (x, y) \in B \times B, \tag{5}$$

une équation différentielle sur B. On suppose que les équations (1) et (5) sont intégrables sur $\{e\} \times B$. On désigne par f_x (resp. h_x) la solution de l'équation (1) (resp. (5)) avec les données initiales (e, x).

DÉFINITION 3. Les solutions des équations (1) et (5) sont conjuguées, si et seulement si,

$$f_x(y) = h_y(x) \quad , \quad \forall (x, y) \in B \times B.$$

À l'aide de ces éléments nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 4. *Une C^∞–variété de Banach* B, *connexe, est un loop de Lie–Banach avec l'unité e si, et seulement si, sont vérifiées les conditions suivantes*:

1) *il existent les C^∞–sections* F, H *dans le fibré vectoriel* $L(TB\,;TB)$ *et* $F(x,y)\,,\,H(x,y)\in L_{is}(T_x B\,;T_y B)$,

2) *les équations* (1) *et* (5) *sont intégrables sur* $\{e\}\times B$ *et leurs solutions sont conjuguées.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Si B est un loop de Lie–Banach, nous noterons par $(L_x^\pi\,,L_x^\mu\,,L_x^\lambda)$ (resp. $R_x^\pi\,,R_x^\mu\,,R_x^\lambda$) les translations à gauche (resp. à droite) sur B déterminées par le point $x\in B$ et les lois de compositions, $\pi\,,\mu\,,\lambda$. Nous définissons les applications F et H par les relations:

$$F(x,y)=T_x L^\pi_{\lambda(y,x)}\quad;\quad H(x,y)=T_x R^\pi_{\mu(x,y)}\,. \tag{6}$$

Les applications F et H sont différentiables de classe C^∞ et, en utilisant les relations:

$$L_z^\pi\circ L_z^\mu=L_z^\mu\circ L_z^\pi=R_z^\pi\circ R_z^\lambda=R_z^\lambda\circ R_z^\pi=id_B\,,\qquad \forall z\in B,$$

on déduit que $F(x,y)\,,\,H(x,y)\in L_{is}(T_x B\,;T_y B)$. En tenant compte de (6) on a:

$$F(y\,,L_x^\pi(y))\;=T_y L^\pi_{\lambda(\pi(x,y),y)}=T_y L_x^\pi\,,$$

$$H(y\,,R_x^\pi(y))=T_y R^\pi_{\mu(y,\pi(y,x))}=T_y R_x^\pi\,.$$

Mais $L_x^\pi(e)=R_x^\pi(e)=x$, donc L_x^π (resp. R_x^π) est une solution de (1) (resp. de (5)) avec les données initiales $(e\,,x)$. Il est clair que ces solutions sont conjuguées.

La condition es suffisante. Nous désignons par f_x (resp. h_x) la solution de (1) (resp. de (5)) avec les données initiales $(e\,,x)$. En utilisant le théorème d'unicité pour l'équation (1), nous pouvons définir la loi de composition

$$\pi:B\times B\to B\quad;\quad \pi(x,y)=f_x(y). \tag{7}$$

En tanant compte que les solutions des équations (1) et (5) sont conjuguées, nous obtenons $\pi(x\,,e)=\pi(e\,,x)=x$, pour tout $x\in B$. Les équations (4) ont les solutions uniques:

$$x=(h_a)^{-1}(b)\quad;\quad y=(f_a)^{-1}(b)\,.$$

Les applications $(f_a)^{-1}$ et $(h_a)^{-1}$ sont des solutions pour les équations différentielles sur B

$$T_x y=F^{-1}(y\,,x)\quad;\quad T_x y=H^{-1}(y\,,x).$$

La différentiabilitée des applications $\pi\,,\mu$ et λ résulte d'une même manière que la différentiabilitée de l'application π du Théorème 2, *q.e.d.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEJANCU A. (1972) – *Formes différentielles et groupes de Lie–Banach*, «An. Univ. Iaşi», *18* (1), 125–137.
[2] BOURBAKI N. (1967) – *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicul de résultats (paragraphes 1 à 7), Paris, Herman.
[3] CARTAN H. (1967) – *Formes différentielles*, Paris, Herman.
[4] LANG S. (1967) – *Introduction aux variétés différentiables*, Paris, Dunod, 1967.
[5] LESLIE J. (1967) – *On a differentiable structure for the group of diffeomorphisms*, «Topology», *6*, 263–271.