Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Stefano Marchiafava

Varietà localmente grassmanniane quaternionali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.1-2, p. 80–89.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_1-2_80_0>

Geometria differenziale. — *Varietà localmente grassmanniane quaternionali* (*). Nota (**) di STEFANO MARCHIAFAVA, presentata dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — A previous result characterizing manifolds with a quaternion generalized structure as quaternion local projective manifolds is extended: a manifold admits a quaternion tensorial product structure if and only if it is a quaternion local Grassmannian manifold.

INTRODUZIONE

Recentemente alcuni Autori (1) si sono occupati dello studio di varietà reali il cui fibrato tangente ammette una « struttura prodotto tensoriale quaternionale », di tipo (p, q), cioè ha come gruppo strutturale il gruppo $G = GL(p, \mathbf{Q}) \otimes GL(q, \mathbf{Q})$ ($\mathbf{Q}$ = corpo dei quaternioni sul campo $\mathbf{R}$). Quando la struttura è « integrabile » la varietà è dotata di sistemi di coordinate quaternionali locali i cui differenziali sono legati da trasformazioni di G.

La varietà di Grassmann quaternionale, $G^{\mathbf{Q}}_{q,p}$, dei sottospazi vettoriali q-dimensionali di $\mathbf{Q}^{p+q}$, dotata di coordinate locali di Pontrjagin, fornisce un esempio notevole di varietà con una struttura integrabile del tipo detto (2).

Quando $q = 1$ (risp. $p = 1$) il gruppo $GL(p, \mathbf{Q}) \otimes GL(1, \mathbf{Q})$ si riduce al gruppo lineare quaternionale sinistro (risp. destro) considerato da E. Martinelli [4]. Una varietà che ammetta una struttura di questo tipo si dice varietà « a struttura quaternionale generalizzata, destra (risp. sinistra) ».

In un precedente lavoro [3] ho caratterizzato le varietà a struttura quaternionale generalizzata « integrabile » come le varietà « localmente proiettive quaternionali ».

Nella presente Nota estendo il risultato citato dimostrando che le varietà ammettenti una struttura prodotto tensoriale quaternionale di tipo (p, q), integrabile sono tutte e sole le varietà *localmente Grassmanniane quaternionali* del tipo $G^{\mathbf{Q}}_{q,p}$.

Per $p \neq 1$ e $q \neq 1$, Th. Hangan [1] ha stabilito una simile caratterizzazione per varietà reali o complesse le quali ammettano una struttura prodotto tensoriale, di tipo (p, q), integrabile analoga a quella quì indicata, con $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ in luogo di $\mathbf{Q}$. Ma, se $p \geq 1$, $q = 1$ (il caso $p = 1$, $q \geq 1$ si riduce al precedente per dualità) risulta invece che *ogni* varietà reale o complessa ammette una strut-

(*) Lavoro eseguito con contributo del CNR, nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1974.

(1) Cfr. Th. Hangan [1], R. Iordanescu [2].

(2) Cfr. ad esempio R. Iordanescu [2].

tura prodotto tensoriale, di tipo $(p, 1)$, integrabile, sicché per caratterizzare tra di esse le varietà localmente proiettive (reali o complesse) occorre introdurre ipotesi aggiuntive. Non è così nel caso quaternionale poiché appunto il teorema enunciato comprende anche il caso $q = 1$ (o $p = 1$).

1. CONVENZIONI

Rappresenteremo al solito un quaternione $q \in \mathbf{Q}$ in una fissata base normale scrivendo $q = \underset{0}{q} i_0 + \underset{1}{q} i_1 + \underset{2}{q} i_2 + \underset{3}{q} i_3 \ (\underset{a}{q} \in \mathbf{R} \, ; a = 0, 1, 2, 3)$, dove $i_0 = 1$ e i_1, i_2, i_3 verificano le ordinarie relazioni $(i_\lambda)^2 = (i_\mu)^2 = (i_\nu)^2 = -1$; $i_\lambda i_\mu = - i_\mu i_\lambda = i_\nu$ (essendo λ, μ, ν una qualunque permutazione circolare di $1, 2, 3$).

Identificheremo spesso tacitamente matrici quaternionali $X = (x_i^\alpha)$ $(\alpha = 1, \cdots, p \, ; i = 1, \cdots, q)$ di tipo $p \times q$ con gli elementi dello spazio numerico quaternionale $\mathbf{Q}^{pq}$. Con tale convenzione il gruppo $GL(p, \mathbf{Q}) \otimes \otimes GL(q, \mathbf{Q})$ si intenderà definito come gruppo delle trasformazioni di $\mathbf{Q}^{pq}$ espresse da equazioni della forma

$$X' = PXQ \tag{1.1}$$

con $P = (P_\beta^\alpha)$, $Q = (Q_i^j)$ matrici quaternionali invertibili.

Quando si pensi $\mathbf{Q}^{pq}$ come spazio vettoriale sui reali le trasformazioni (1.1) danno luogo a un sottogruppo di $GL(4pq, \mathbf{R})$ che indicheremo ancora con lo stesso simbolo.

2. VARIETÀ DI GRASSMANN E VARIETÀ LOCALMENTE GRASSMANNIANE QUATERNIONALI

Sia $\mathbf{Q}^{p+q}$ lo spazio numerico quaternionale $(p+q)$–dimensionale, pensato destro, e $G_{q,p}^{\mathbf{Q}}$ la varietà di Grassmann dei sottospazi vettoriali q–dimensionali di $\mathbf{Q}^{p+q}$. Su $G_{q,p}^{\mathbf{Q}}$ viene assegnata una struttura differenziabile dalle coordinate di Pontrjagin (3) che richiamiamo brevemente.

Siano $\mathbf{Q}_0^q \in G_{q,p}^{\mathbf{Q}}$ e $\mathbf{Q}_1^p$ sottospazio vettoriale p–dimensionale di $\mathbf{Q}^{p+q}$ supplementare di $\mathbf{Q}_0^q$. Ogni $x \in \mathbf{Q}^{p+q}$ si scrive univocamente nella forma $x = v_0 + v_1$ con $v_0 \in \mathbf{Q}_0^q$, $v_1 \in \mathbf{Q}_1^p$. Si ha allora l'omomorfismo (di spazi vettoriali quaternionali destri) $\Phi : \mathbf{Q}^{p+q} \to \mathbf{Q}_0^q$, *proiezione* di $\mathbf{Q}^{p+q}$ *sopra* $\mathbf{Q}_0^q$ *nella direzione di* $\mathbf{Q}_1^p$, definito dalla $\Phi(x) = v_0$.

Indichiamo con U l'insieme dei sottospazi $\mathbf{Q}_\xi^q \in G_{q,p}^{\mathbf{Q}}$ tali che $\mathbf{Q}_\xi^q \cap \mathbf{Q}_1^p = 0$. Ovviamente $\mathbf{Q}_0^q \in U$. La restrizione $\Phi_\xi = \Phi_{|\mathbf{Q}_\xi^q}$ di Φ è un isomorfismo. Fissate allora basi $(e_1, \cdots, e_p)$ di $\mathbf{Q}_1^p$ e $(f_1, \cdots, f_q)$ di $\mathbf{Q}_0^q$ i vettori $\tilde{f}_i = \Phi_\xi^{-1} f_i$ $(i = 1, \cdots, q)$ costituiscono una base di $\mathbf{Q}_\xi^q$. Posto poi

$$\mathbf{E} = (e_1 \cdots e_p) \quad , \quad \mathbf{F} = (f_1 \cdots f_q) \quad , \quad \tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_q)$$

(3) Cfr. L. Pontrjagin [6] e R. Iordanescu [2].

risulta

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{E}\xi + \mathbf{F} \tag{2.1}$$

con $\xi = (\xi_i^\alpha)$ $(\alpha = 1, \cdots, p\,; i = 1, \cdots, q)$ opportuna matrice quaternionale $p \times q$.

I quaternioni ξ_i^α sono le coordinate di Pontrjagin di $\mathbf{Q}_\xi^q$ (valide nell'intorno U di $\mathbf{Q}_0^q$ entro $G_{q,p}^{\mathbf{Q}}$).

Non è difficile determinare il legame tra due sistemi di coordinate di Pontrjagin validi in un medesimo intorno [4]. Per il seguito ci sarà necessario esprimere tale legame in modo conveniente onde ne facciamo qui una deduzione matriciale diretta.

Siano $'\mathbf{E} = ('e_\alpha)$, $'\mathbf{F}\,('f_i)$ basi rispettivamente per sottospazi $'\mathbf{Q}_1^p$, $'\mathbf{Q}_0^q$ i quali, in analogia a quanto precede, definiscano coordinate $('\xi_i^\alpha)$ su U′. Il cambiamento di base per $\mathbf{Q}^{p+q}$ sarà espresso mediante relazioni

$$\mathbf{E} = {'\mathbf{E}}\mathrm{A} + {'\mathbf{F}}\mathrm{B} \quad , \quad \mathbf{F} = {'\mathbf{E}}\mathrm{C} + {'\mathbf{F}}\mathrm{D} \tag{2.2}$$

con la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (a_\beta^\alpha) & (b_\gamma^i) \\ (c_j^\rho) & (d_k^h) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

quaternionale invertibile.

Sostituito nella (2.1) si ha:

$$\tilde{\mathbf{F}} = {'\mathbf{E}}\,(\mathrm{A}\xi + \mathrm{C}) + {'\mathbf{F}}\,(\mathrm{B}\xi + \mathrm{D}). \tag{2.4}$$

Se $\mathbf{Q}_\xi^q \in \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ sussisterà anche la

$${'\tilde{\mathbf{F}}} = {'\mathbf{E}}{'\xi} + {'\mathbf{F}} \tag{2.5}$$

analoga alla (2.1) e per $\tilde{\mathbf{F}}$, $'\tilde{\mathbf{F}}$, basi entrambi per $\mathbf{Q}_\xi^q$, dovrà aversi $'\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}\mathrm{R}$ con $\mathrm{R} = (r_j^i)$ matrice quaternionale invertibile: tenuto conto della (2.4) se ne trae la

$${'\tilde{\mathbf{F}}} = {'\mathbf{E}}\,(\mathrm{A}\xi + \mathrm{C})\,\mathrm{R} + {'\mathbf{F}}\,(\mathrm{B} + \mathrm{D}\xi)\,\mathrm{R}. \tag{2.6}$$

Dal confronto dei coefficienti di $'\mathbf{F}$, $'\mathbf{E}$ nelle (2.5), (2.6) risulta che $\mathrm{B} + \mathrm{D}\xi$ ammette inversa $(\mathrm{B} + \mathrm{D}\xi)^{-1} = \mathrm{R}$ e inoltre

$${'\xi} = (\mathrm{A}\xi + \mathrm{C})\,(\mathrm{B} + \mathrm{D}\xi)^{-1}. \tag{2.7}$$

(4) Cfr. R. Iordanescu [2].

Viceversa, se $B + D\xi$ è invertibile dalla (2.4) si ricava la (2.5) con $'\xi$ definita dalla (2.7) e $'\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(B + D\xi)^{-1}$ base di $\mathbf{Q}^q_\xi$ che dunque appartiene a U' (ammettendo ivi coordinate $'\xi$).

La (2.7) fornisce la relazione richiesta ed è dunque mediante una *trasformazione lineare fratta* (*a destra, quaternionale*) *invertibile*, TLFI, che si passa dalle $\xi = (\xi_i^\alpha)$ alle $'\xi = ('\xi_i^\alpha)$.

Dalle precedenti considerazioni discende anzi la

(2.8) PROPOSIZIONE. *Le TLFI del tipo* (2.7) *caratterizzano le trasformazioni di coordinate di Pontrjagin su* $G^{\mathbf{Q}}_{q,p}$.

Infatti se ξ è un sistema di coordinate di Pontrjagin su $G^{\mathbf{Q}}_{q,p}$ una TLFI del tipo detto, definita ove $B + D\xi$ è invertibile, fa passare ad un nuovo sistema $'\xi$ di coordinate anch'esse di Pontrjagin, relative alle basi $'\mathbf{E}$, $'\mathbf{F}$ date dalle inverse delle (2.2).

Assegnata una varietà reale V_{4pq} paracompatta, di classe C^ω (5), di dimensione reale $4pq$ ($p, q \geq 1$ interi) diremo che V_{4pq} è *localmente Grassmanniana quaternionale* quando possono assegnarvisi, con riguardo ad un opportuno ricoprimento aperto, sistemi di coordinate quaternionali ammissibili (6) (ξ_i^α) legati nei domini comuni da trasformazioni TLFI.

3. VARIETÀ CON STRUTTURA PRODOTTO TENSORIALE QUATERNIONALE INTEGRABILE. LORO CARATTERIZZAZIONE

Th. Hangan [1] ha introdotto la nozione di varietà (reale) V_{4pq} con *struttura prodotto tensoriale quaternionale, di tipo* (p, q). La struttura è *integrabile* quando su V_{4pq} possono considerarsi sistemi di coordinate quaternionali ammissibili, $\xi = (\xi_i^\alpha)$, $(\alpha = 1, \cdots, p\,; i = 1, \cdots, q)$, tali che per due qualunque di essi ξ, $'\xi$, nel comune aperto di definizione, la trasformazione tra i relativi differenziali $d\xi = (d\xi_i^\alpha)$, $d'\xi = (d'\xi_i^\alpha)$ appartiene al gruppo $GL(p, \mathbf{Q}) \otimes GL(q, \mathbf{Q})$ ovvero

$$d'\xi = P\, d\xi\, Q \tag{3.1}$$

con $P = (P_\beta^\alpha)$, $Q = (Q_i^j)$ matrici quaternionali invertibili, funzioni C^ω delle ξ_i^α.

La varietà di Grassmann $G^{\mathbf{Q}}_{q,p}$ possiede una struttura integrabile del tipo descritto assumendovi le coordinate quaternionali ξ di Pontrjagin (7).

Per stabilire ciò basta differenziare le (2.7), il che porge le (3.1) con

$$P = A - {'\xi} D \quad , \quad Q = (B + D\xi)^{-1}. \tag{3.2}$$

(5) Queste ipotesi si sottointenderanno per le varietà in considerazione e le funzioni che interverranno si supporranno di classe C^ω.

(6) Per le quali cioè i coefficienti reali $\xi^\alpha_{i\,a}$ danno coordinate ammissibili per la struttura reale di V_{4pq}.

(7) Cfr. R. Iordanescu [2]; vedi anche Th. Hangan [1].

È immediato, per il carattere locale di tale deduzione, che su ogni varietà localmente Grassmanniana quaternionale resta assegnata una struttura di prodotto tensoriale quaternionale integrabile, dello stesso tipo.

Ebbene, mostreremo che tale asserzione può invertirsi: resterà stabilito così il

TEOREMA. *Una varietà differenziabile reale* V_{4pq} *ammette una struttura prodotto tensoriale, di tipo* (p, q), *integrabile se e solo se è localmente Grassmanniana quaternionale, di tipo* $G^{\mathbf{Q}}_{q,p}$.

Per la dimostrazione di quanto enunciato riuscirà utile osservare a proposito delle (3.2) che vale la seguente

(3.3) PROPOSIZIONE. *Una trasformazione invertibile dell'aperto* $U \subset \mathbf{Q}^{pq}$, $'\xi = {}'\xi(\xi)$, *differenziabile nella forma* (3.1) *con* P *o* Q *come nelle* (3.2) *è una* TLFI *del tipo* (2.7); *e viceversa.*

Supponiamo infatti che, ad esempio, assieme alle (3.1) valga la seconda delle (3.2). Consideriamo le variabili $\eta = (\eta_i^\alpha)$ definite da $\eta = {}'\xi\, {}'Q$ con $'Q = B + D\xi$. Differenziando e fatto poi uso delle (3.1) risulta $d\eta = d'\xi\, 'Q + {}'\xi\, d'Q = P\, d\xi + {}'\xi D\, d\xi = (P + {}'\xi D)\, d\xi$. Dunque η è differenziabile a destra rispetto a ξ e trattasi pertanto di funzione lineare di ξ [8], della forma $\eta = A\xi + C$. Ne segue la conclusione sostituendo ad η l'espressione mediante le ξ.

Se si procede invece a partire dalla prima delle (3.2) basterà differenziare le $\eta = P\xi$.

4. PRELIMINARI ALLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

Sia data dunque una varietà V_{4pq} con una struttura prodotto tensoriale, di tipo (p, q), integrabile e sistemi di coordinate quaternionali ammissibili $\xi = (\xi_i^\alpha)$.

Supporremo l'intersezione dei domini di due tali sistemi semplicemente connessa.

Mostreremo che, in queste ipotesi, se ξ, $'\xi$ sono coordinate negli aperti $U, U' \subset V_{4pq}$ in $U \cap U'$, ove vale la (3.1), il legame tra ξ e $'\xi$ è espresso mediante una TLFI. Ne risulterà dimostrato il teorema.

Se nella (3.1) le matrici P, Q sono della forma (3.2) la conclusione è immediata (Prop. 3.3).

Va osservato però che P, Q non riescono individuate dalle (3.1) potendovisi ad esse sostituire $\tilde{P} = Ph^{-1}$, $\tilde{Q} = Qh$ con h funzione reale non nulla.

Si tratta dunque di vedere se per una opportuna funzione h le matrici $\tilde{P}$ o $\tilde{Q}$ verificano le ipotesi della proposizione citata.

(8) In base ad una nota caratterizzazione delle funzioni differenziabili in senso quaternionale.

La seconda delle (3.2) vale per $\tilde{Q}$ se e solo se $'\tilde{Q} = \tilde{Q}^{-1}$ è differenziabile nella forma quaternionale

$$d'\tilde{Q} = D d\xi \tag{4.1}$$

con $D = (d^i_\alpha)$ matrice quaternionale (costante).

Esplicitando e tenuto conto che $\tilde{Q}^r_i \, '\tilde{Q}^i_j = \delta^r_j$ (δ^r_j = simbolo di Kronecker), da cui si ha anche $\partial\tilde{Q}^r_i \, '\tilde{Q}^i_j = - \tilde{Q}^r_i \, \partial'\tilde{Q}^i_j$, la (4.1) risulta equivalente al sussistere delle

$$\underset{a}{\partial^k_\alpha} \tilde{Q}^r_i \, '\tilde{Q}^i_j = \frac{1}{q} \underset{0}{\partial^s_\alpha} \tilde{Q}^r_i \, '\tilde{Q}^i_s \, \delta^k_j \, i_a \tag{4.2}$$

[9]

ove si è indicata con $\underset{a}{\partial^k_\alpha}$ la derivazione rispetto a $\underset{a}{\xi^\alpha_k}$.

Posto ora $\tilde{Q}^i_j = Q^i_j h$ nelle (4.2) esse si scrivono

$$\delta^r_j \underset{a}{\partial^k_\alpha} H - \frac{1}{q} \underset{0}{\partial^r_\alpha} H \delta^k_j \, i_a = \underset{a}{\partial^k_\alpha} Q^r_i \, 'Q^i_j - \frac{1}{q} \underset{0}{\partial^s_\alpha} Q^r_i \, 'Q^i_s \, \delta^k_j \, i_a \tag{4.3}$$

ove $H = \operatorname{Log} h$.

Le (4.3) costituiscono un sistema differenziale nella funzione incognita H: vedremo che, nelle ipotesi fatte, esso si riduce ad un ordinario sistema di equazioni differenziali reali di primo ordine e inoltre che le condizioni di integrabilità sono sempre verificate.

Ne seguirà l'esistenza di H, ovvero $h = \exp H$.

5. Faremo uso, per dimostrare queste ultime asserzioni, di alcune relazioni che discendono dalla (3.1) ovvero dalle equivalenti

$$\underset{a}{\partial^m_\beta} \, '\xi^\alpha_j = P^\alpha_\beta \, i_a \, Q^m_j . \tag{5.1}$$

Derivando rispetto a $\underset{b}{\xi^\gamma_k}$ si ha infatti

$$\underset{b}{\partial^k_\gamma} \underset{a}{\partial^m_\beta} \, '\xi^\alpha_j = \underset{b}{\partial^k_\gamma} P^\alpha_\beta \, i_a \, Q^m_j + P^\alpha_\beta \, i_a \underset{b}{\partial^k_\gamma} Q^m_j \tag{5.2}$$

e l'uguaglianza delle derivate seconde $\underset{b}{\partial^k_\gamma} \underset{a}{\partial^m_\beta} \, '\xi^\alpha_j$ e $\underset{a}{\partial^m_\beta} \underset{b}{\partial^k_\gamma} \, '\xi^\alpha_j$ fornisce un sistema di relazioni, implicanti le funzioni $'P^\alpha_\beta$, $'Q^i_j$ e le derivate $\underset{b}{\partial^k_\gamma} P^\alpha_\beta$, $\underset{b}{\partial^k_\gamma} Q^m_j$, che risolto si scrive mediante le

$$\begin{aligned} 2 \, 'P^\rho_\alpha \underset{0}{\partial^m_\beta} P^\alpha_\gamma \, \delta^k_r = {} & \\ = \delta^\rho_\gamma \{ & (i_\lambda \underset{0}{\partial^m_\beta} Q^k_j \, 'Q^j_r - \underset{0}{\partial^m_\beta} Q^k_j \, 'Q^j_r \, i_\lambda) + (- i_\lambda \underset{\mu}{\partial^m_\beta} Q^k_j \, 'Q^j_r \, i_\nu - \underset{\mu}{\partial^m_\beta} Q^k_j \, 'Q^j_r \, i_\mu)\} + \\ + \delta^\rho_\beta \{ & (i_\mu \underset{0}{\partial^k_\gamma} Q^m_j \, 'Q^j_r \, i_\mu + \underset{0}{\partial^k_\gamma} Q^m_j \, 'Q^j_r) + (i_\mu \underset{\lambda}{\partial^k_\gamma} Q^m_j \, 'Q^j_r \, i_\nu - \underset{\lambda}{\partial^k_\gamma} Q^m_j \, 'Q^j_r \, i_\lambda)\} . \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

(9) Sottointenderemo nel seguito, come qui, le sommatorie rispetto ad indici ripetuti in alto e in basso; ometteremo anche di indicare la variabilità degli indici.

$$2\,{}'P^{\rho}_{\alpha}\,\underset{\lambda}{\partial^{k}_{\gamma}}\,P^{\alpha}_{\beta}\,\delta^{m}_{r} = \tag{5.3.2}$$

$$= \delta^{\rho}_{\gamma}\{(i_{\lambda}\,\underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r} - \underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\lambda}) + (-\,i_{\lambda}\,\underset{\mu}{\partial^{m}_{\beta}}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\mu} + \underset{\mu}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\nu})\} -$$

$$-\,\delta^{\rho}_{\beta}\{(-\,\underset{0}{\partial^{k}_{\gamma}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\lambda} + i_{\mu}\,\underset{0}{\partial^{k}_{\gamma}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\nu}) + (\underset{\lambda}{\partial^{k}_{\gamma}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r} - i_{\mu}\,\underset{\lambda}{\partial^{k}_{\gamma}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\mu})\}\,.$$

Dalle (5.3) si ricavano poi relazioni per le sole funzioni $\underset{a}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}$. In primo luogo osservando che il primo membro della (5.3.1) non dipende dalla particolare permutazione circolare di i, j, k a secondo membro onde sostituita a λ, μ, ν la permutazione μ, ν, λ e uguagliati i coefficienti di i_0, i_λ, i_ν dei secondi membri si hanno le

$$\mathbf{R}e(-\,\underset{\mu}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\mu} - \underset{\lambda}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\lambda} + \underset{\nu}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\nu} + \underset{\mu}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\mu}) = 0 \tag{5.4.1}$$ [10]

$$\mathbf{R}e(\underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\lambda}) = \mathbf{R}e(\underset{\mu}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\nu}) \tag{5.4.2}$$

$$\mathbf{R}e(\underset{0}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\nu}) = -\,\mathbf{R}e(\underset{\mu}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\lambda})\,. \tag{5.4.3}$$

Altre relazioni si ottengono ragionando come segue. Se si somma nella (5.3.1) m con r se ne trae una espressione di $2\,{}'P^{\rho}_{\alpha}\,\underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,P^{\alpha}_{\gamma}$ che sostituita di nuovo nella (5.3.1) dà una relazione nelle sole $\underset{a}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}$ la quale deve essere identicamente soddisfatta. Da quest'ultima, posto $\rho = \gamma = \beta$ e uguagliati i coefficienti reali di i_0, i_ν rispettivamente si hanno le

$$\mathbf{R}e(\underset{0}{\partial^{s}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{s} + \underset{\mu}{\partial^{s}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{s}\,i_{\mu} + \underset{\lambda}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{t}_{j}\,{}'Q^{j}_{t}\,i_{\lambda})\,\delta^{k}_{r} = \tag{5.5.1}$$

$$= \mathbf{R}e(\underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r} + \underset{\mu}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\mu} + \underset{\lambda}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\lambda})\,,$$

$$\mathbf{R}e(\underset{0}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\nu}) = \mathbf{R}e(\underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{t}_{j}\,{}'Q^{j}_{t}\,i_{\nu})\,\delta^{k}_{r}\,. \tag{5.5.2}$$

Con analogo procedimento a partire dalla (5.3.2) si traggono le

$$\mathbf{R}e(\underset{\mu}{\partial^{s}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{s}\,i_{\nu} + \underset{0}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{t}_{j}\,{}'Q^{j}_{t}\,i_{\lambda} - \underset{\lambda}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{t}_{j}\,{}'Q^{j}_{t})\,\delta^{m}_{r} = \tag{5.6.1}$$

$$= q\mathbf{R}e(\underset{\mu}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\nu} + \underset{0}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\lambda} - \underset{\lambda}{\partial^{k}_{\beta}}\,Q^{m}_{j}\,{}'Q^{j}_{r})\,,$$

$$\mathbf{R}e(\underset{\mu}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}\,i_{\mu}) = \frac{1}{q}\,\mathbf{R}e(\underset{\mu}{\partial^{s}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{s})\,i_{\mu}\,. \tag{5.6.2}$$

Infine, accenniamo solo al fatto che altre conseguenze delle (5.3) e coinvolgenti solo le funzioni $\underset{a}{\partial^{m}_{\beta}}\,Q^{k}_{j}\,{}'Q^{j}_{r}$ sono deducibili tutte dalle (5.4), (5.5), (5.6).

(10) $\mathbf{R}e\,q\;(q \in \mathbf{Q})$ è la parte reale di q; per le considerazioni svolte si utilizza sovente l'uguaglianza $\mathbf{R}e(qq') = \mathbf{R}e(q'q)$.

6. CONCLUSIONE

Il sistema differenziale (4.3) è espresso in forma reale dalle

$$\frac{1}{q}\,\delta^k_i\,\underset{0}{\partial^l_\alpha}\mathrm{H} = \mathbf{R}e\left(\underset{\mu}{\partial^k_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_i\,i_\mu + \frac{1}{q}\,\underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,\delta^k_i\right) \tag{6.1}$$

$$\delta^l_i\,\underset{\mu}{\partial^k_\alpha}\mathrm{H} = \mathbf{R}e\left(\underset{\mu}{\partial^k_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_i - \frac{1}{q}\,\underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,\delta^k_i\,i_\mu\right) \tag{6.2}$$

$$\underset{0}{\partial^k_\alpha}\mathrm{H}\delta^l_i - \frac{1}{q}\,\underset{0}{\partial^l_\alpha}\mathrm{H}\delta^k_i = \mathbf{R}e\left(\underset{0}{\partial^k_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_i - \frac{1}{q}\,\underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,\delta^k_i\right) \tag{6.3}$$

$$\mathbf{R}e\left(\underset{0}{\partial^k_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_i\,i_\mu - \frac{1}{q}\,\underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,\delta^k_i\,i_\mu\right) = 0 \tag{6.4}$$

$$\mathbf{R}e\left(\underset{\mu}{\partial^k_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_i\,i_\lambda + \frac{1}{q}\,\underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,\delta^k_i\,i_\nu\right) = 0 \tag{6.5}$$

$$\mathbf{R}e\left(\underset{\mu}{\partial^k_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_i\,i_\nu - \frac{1}{q}\,\underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,\delta^k_i\,i_\lambda\right) = 0\,. \tag{6.6}$$

Infatti, posto $a = 0$ nelle (4.3) e uguagliate le parti reali del primo e secondo membro ne risulta la (6.3); l'uguaglianza dei coefficienti di i_λ, i_μ, i_ν fornisce la (6.4). Per $a = \mu$ nella (4.3) si ottengono poi, uguagliando i coefficienti di i_0, i_λ, i_μ, i_ν del primo e secondo membro, le (6.2), (6.5), (6.1), (6.6) rispettivamente.

Le equazioni sopra scritte si riducono, nelle nostre ipotesi, alle seguenti

$$\underset{0}{\partial^l_\alpha}\mathrm{H} = \mathbf{R}e\,(\underset{\mu}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,i_\mu + \underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s)\quad,\quad \underset{\mu}{\partial^l_\alpha}\mathrm{H} = \mathbf{R}e\,(\underset{\mu}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s - \underset{0}{\partial^s_\alpha}Q^l_j\,{}'Q^j_s\,i_\mu) \tag{6.7}$$

che si ottengono dalle (6.1), (6.2) rispettivamente sommandovi k con i. Tutte le altre equazioni si deducono da esse facendo uso delle relazioni stabilite al n. 5 o in conseguenza di esse sono delle identità.

Ad esempio le (6.4) discendono dalle (5.5.2), ed anzi sono ad esse equivalenti; le (6.5), (6.6) seguono dal confronto dell'espressione di $\underset{0}{\partial^k_\beta}Q^l_j\,{}'Q^j_i\,i_\lambda$ che si ricava dalle (6.4), già dimostrate, dalle (5.4.2) e dalle (5.4.3). Altre relazioni, come quella di compatibilità che si ottiene sostituendo nella (6.3) le (6.7), risultano tutte identicamente soddisfatte. Inoltre il secondo membro della prima delle (6.7) si verifica non dipendere dalla scelta di μ.

7. Resta ora da verificare l'integrabilità del sistema (6.7).

Premettiamo la seguente osservazione. Si ricordi che $\underset{a}{\partial^\beta_k}\,{}'Q^l_t\,Q^t_s = -{}'Q^l_t\,\underset{a}{\partial^k_\beta}Q^t_s$, e analogamente $\underset{a}{\partial^m_\beta}\,{}'P^\rho_\alpha\,P^\gamma_\rho = -{}'P^\rho_\alpha\,\underset{a}{\partial^m_\beta}P^\gamma_\rho$, donde le

$$\underset{a}{\partial^k_\beta}\,{}'Q^l_r = -{}'Q^l_s\,\underset{a}{\partial^k_\beta}Q^s_t\,{}'Q^t_r \quad,\quad \underset{a}{\partial^m_\beta}\,{}'P^\rho_\alpha = -{}'P^\rho_\gamma\,\underset{a}{\partial^m_\beta}P^\gamma_\delta\,{}'P^\delta_\alpha\,. \tag{7.1}$$

Differenziando $\underset{a}{\partial^l_\beta} Q^t_j\,'Q^j_t$ e fatto uso delle precedenti si ha

$$\underset{b}{\partial^m_\alpha}(\underset{a}{\partial^l_\beta} Q^t_j\,'Q^j_t) = (\underset{b}{\partial^m_\alpha}\underset{a}{\partial^l_\beta} Q^t_j)\,'Q^j_t - \underset{a}{\partial^l_\beta} Q^t_j\,'Q^j_r\, \underset{b}{\partial^m_\alpha} Q^r_s\,'Q^s_t$$

e, scambiando gli indici,

$$\underset{a}{\partial^l_\beta}(\underset{b}{\partial^m_\alpha} Q^t_j\,'Q^j_t) = (\underset{a}{\partial^l_\beta}\underset{b}{\partial^m_\alpha} Q^t_j)\,'Q^j_t - \underset{b}{\partial^m_\alpha} Q^t_j\,'Q^j_r\, \underset{a}{\partial^l_\beta} Q^r_s\,'Q^s_t .$$

Ma le parti reali dei secondi membri di queste ultime sono uguali.

Ne segue l'identità, utilizzata nel seguito,

$$(7.2)\qquad \underset{a}{\partial^l_\beta}\,\mathbf{R}e\,(\underset{b}{\partial^m_\alpha} Q^t_j\,'Q^j_t) = \underset{b}{\partial^m_\alpha}\,\mathbf{R}e\,(\underset{a}{\partial^l_\beta} Q^t_j\,'Q^j_t) .$$

Ora, le condizioni di integrabilità del sistema in esame si scrivono in generale

$$(7.3)\qquad \underset{b}{\partial^m_\alpha}(\underset{a}{\partial^l_\beta} \mathrm{H}) = \underset{a}{\partial^l_\beta}(\underset{b}{\partial^m_\alpha} \mathrm{H}) .$$

Per $b = \lambda$ e $a = \mu$ esse sono espresse dalle

$$(7.4)\qquad \underset{\lambda}{\partial^m_\alpha}\,\mathbf{R}e\,(\underset{\mu}{\partial^s_\beta} Q^l_j\,'Q^j_s - \underset{0}{\partial^s_\beta} Q^l_j\,'Q^j_s\, i_\mu) = \underset{\mu}{\partial^l_\beta}\,\mathbf{R}e\,(\underset{\lambda}{\partial^s_\alpha} Q^m_j\,'Q^j_s - \underset{0}{\partial^s_\alpha} Q^m_j\,'Q^j_s\, i_\lambda)$$

ovvero, fatto uso delle (5.4.2), (5.5.2), (5.6.1) e (7.2), dalle

$$(7.5.1)\qquad \underset{\lambda}{\partial^m_\alpha}\,\mathbf{R}e\,(\underset{0}{\partial^l_\beta} Q^t_j\,'Q^j_t\, i_\mu) = \underset{\mu}{\partial^l_\beta}\,\mathbf{R}e\,(\underset{0}{\partial^m_\alpha} Q^t_j\,'Q^j_t\, i_\lambda) .$$

Le altre condizioni che si ottengono dalle (7.3) ponendovi $a = 0$ e $b = \mu$, $b = 0$ rispettivamente si scrivono poi

$$(7.5.2)\qquad \underset{0}{\partial^m_\alpha}\,\mathbf{R}e\,(\underset{0}{\partial^l_\beta} Q^t_j\,'Q^j_t\, i_\mu) = -\underset{\mu}{\partial^l_\beta}\,\mathbf{R}e\,(\underset{\mu}{\partial^m_\alpha} Q^t_j\,'Q^j_t\, i_\mu)$$

$$(7.5.3)\qquad \underset{0}{\partial^m_\alpha}\,\mathbf{R}e\,(\underset{\mu}{\partial^l_\beta} Q^t_j\,'Q^j_t\, i_\mu) = \underset{0}{\partial^l_\beta}\,\mathbf{R}e\,(\underset{\mu}{\partial^m_\alpha} Q^t_j\,'Q^j_t\, i_\mu) .$$

Per verificare che le (7.5) sono identicamente soddisfatte consideriamo dapprima l'identità

$$(7.6)\qquad \underset{b}{\partial^m_\alpha}('P^\beta_\rho\, \underset{a}{\partial^l_\beta} P^\rho_\beta + 'P^\alpha_\rho\, \underset{a}{\partial^l_\beta} P^\rho_\alpha) - \underset{a}{\partial^l_\beta}('P^\alpha_\rho\, \underset{b}{\partial^m_\alpha} P^\rho_\alpha + 'P^\beta_\rho\, \underset{b}{\partial^m_\alpha} P^\rho_\beta) =$$
$$= \underset{b}{\partial^m_\alpha}\,'P^\beta_\rho\, \underset{a}{\partial^l_\beta} P^\rho_\beta + \underset{b}{\partial^m_\alpha}\,'P^\alpha_\rho\, \underset{a}{\partial^l_\beta} P^\rho_\alpha - \underset{a}{\partial^l_\beta}\,'P^\alpha_\rho\, \underset{b}{\partial^m_\alpha} P^\rho_\alpha - \underset{a}{\partial^l_\beta}\,'P^\beta_\rho\, \underset{b}{\partial^m_\alpha} P^\rho_\beta$$

(ove si intende di non sommare rispetto agli indici α e β) ottenuta differenziando le espressioni in parentesi a primo membro e tenendo poi conto delle uguaglianze per le derivate seconde. Fatto uso delle (7.1) e osservato che dalle (5.3) $'P^\rho_\alpha\, \underset{a}{\partial^m_\beta} P^\alpha_\gamma$ è non nulla solo se $\rho = \gamma$ o $\rho = \beta$ si trova che la parte reale del secondo membro della (7.6) è nulla. Ne risulta dunque la

$$(7.7)\qquad \underset{b}{\partial^m_\alpha}\,\mathbf{R}e\,('P^\beta_\rho\, \underset{a}{\partial^l_\beta} P^\rho_\beta + 'P^\alpha_\rho\, \underset{a}{\partial^l_\beta} P^\rho_\alpha) = \underset{a}{\partial^l_\beta}\,\mathbf{R}e\,('P^\alpha_\rho\, \underset{b}{\partial^m_\alpha} P^\rho_\alpha + 'P^\beta_\rho\, \underset{b}{\partial^m_\alpha} P^\rho_\beta) .$$

Ma le (7.7) sono equivalenti alle (7.5) con indici a e b corrispondenti. Infatti le espressioni che vi compaiono in parentesi a primo e secondo membro si scrivono, utilizzando le (5.3), rispettivamente per $b = 0$, $b = \lambda$

$$(7.8.1) \qquad 2\,\mathbf{R}e\,({}'\mathrm{P}^{\alpha}_{\rho}\,\underset{0}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{P}^{\rho}_{\alpha} + {}'\mathrm{P}^{\beta}_{\rho}\,\underset{0}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{P}^{\rho}_{\beta}) = -\,\mathbf{R}e\,\{\underset{\lambda}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\lambda} + \delta^{\beta}_{\alpha}\,\underset{\lambda}{\partial^{m}_{\beta}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\lambda} + $$
$$+ 2\,(\underset{0}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t} + \underset{\mu}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\mu})\}$$

$$(7.8.2) \qquad 2\,\mathbf{R}e\,({}'\mathrm{P}^{\alpha}_{\rho}\,\underset{\lambda}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{P}^{\rho}_{\alpha} + {}'\mathrm{P}^{\beta}_{\rho}\,\underset{\lambda}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{P}^{\rho}_{\beta}) = \frac{1}{q}\,\mathbf{R}e\,\{\underset{0}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\lambda} + \delta^{\beta}_{\alpha}\,\underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\lambda} + $$
$$+ 2\,(\underset{0}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\lambda} - \underset{\lambda}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t})\}\,.$$

Sostituite nelle (7.7) ad esempio per $b = \lambda$, $a = \mu$ le espressioni (7.8.2) si ottiene, tenuto conto delle (7.2),

$$(7.9) \qquad \underset{\lambda}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathbf{R}e\,\{(1 + 2/q)\,\underset{0}{\partial^{l}_{\beta}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\mu} + \delta^{\alpha}_{\beta}\,\underset{0}{\partial^{l}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\mu}\} =$$
$$= \underset{\mu}{\partial^{l}_{\beta}}\,\mathbf{R}e\,\{(1 + 2/q)\,\underset{0}{\partial^{m}_{\alpha}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\lambda} + \delta^{\beta}_{\alpha}\,\underset{0}{\partial^{m}_{\beta}}\,\mathrm{Q}^{t}_{j}\,{}'\mathrm{Q}^{j}_{t}\,i_{\lambda}\}$$

e queste ultime per $\alpha \neq \beta$ sono le (7.5.1) a meno del fattore non nullo $(1 + 2/q)$; per $\alpha = \beta$ a meno del fattore $(2 + 2/q)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] TH. HANGAN (1968) – *Tensor product tangent bundles*, « Archiv. der Math. », *19* (4), 436–448.

[2] R. IORDANESCU – *Sopra le strutture quaternionali generalizzate*, in pubblicazione su « Boll. U.M.I. ».

[3] S. MARCHIAFAVA (1970) – *Sulle varietà a struttura quaternionale generalizzata*, « Rend. di Matematica », (3), *3*, ser. VI.

[4] E. MARTINELLI (1959) – *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, « Atti Accad. Naz. Lincei », *26*, 353–362.

[5] E. MARTINELLI (1960) – *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *45*, 73–81.

[6] L. S. PONTRJAGIN (1947) – *Characteristic Cycles on Differentiable Manifolds*, « Mat. Sbornik (NS) », *21* (63), 233–284; (1950) – « Am. Math. Soc. Translation », *32*.

[7] G. VRANCEANU (1964) – *Leçons de géometrie différentielle*, Bucarest, *3*, 377.