Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Edmundo Rofman

## Ancora sulla stabilità del metodo di collocazione

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **57** (1974), n.1-2, p. 66–69.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_1-2_66_0>

**Analisi numerica.** — *Ancora sulla stabilità del metodo di collocazione*. Nota [(*)] di EDMUNDO ROFMAN, presentata dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — It is shown that a stability condition of the collocation method, which was proved to be sufficient in a preceding paper [2], is also necessary.

In due Note precedenti [1], [2], ci siamo occupati sia della convergenza di un metodo di risoluzione approssimata di una equazione funzionale, sia di trovare un criterio che assicurasse la stabilità numerica del procedimento adoperato. In questa Nota si vuole precisare il carattere di necessarietà della condizione già indicata in [2] come sufficiente per la stabilità.

La equazione che si voleva risolvere in modo approssimato era la

$$u + \mathrm{K}u = f \tag{1}$$

con $u \in \mathrm{L}^2[a,b]$, $\mathrm{K}:\mathrm{L}^2[a,b] \to \mathrm{C}^0[a,b]$ completamente continuo, $f \in \mathrm{C}^0[a,b]$, ammessa l'esistenza ed unicità della soluzione $u^*$.

Considerata una successione $\{p_h(x)\}_{h\in\mathrm{N}}$ con $p_h(x)$ polinomio di grado $h$, si ottenevano le soluzioni approssimate

$$u_n(x) = \sum_{h=0}^{n} c_h^{(n)} p_h(x)$$

dopo aver calcolato i coefficienti $c_h^{(n)}$ in modo da soddisfare il sistema lineare

$$\sum a_{ih}^{(n)} c_i^{(n)} = f(x_i^{(n)}), \qquad \text{con} \quad a_{ih}^{(n)} = p_h(x_i^{(n)}) + \mathrm{K}p_h(x_i^{(n)}) \tag{2}$$

essendo gli $x_i^{(n)}$ gli zeri del polinomio $\mathrm{V}_{n+1}(x)$ appartenente ad un sistema di polinomi ortogonali $\{\mathrm{V}_n(x)\}$ relativo ad un peso $\mu(x) \geq m > 0$ in $[a,b]$. Si riusciva così [1] a dimostrare la convergenza in $\mathrm{L}^2$ delle $u_n$ verso la $u^*$.

Inoltre se si considera che gli elementi delle matrici $\mathrm{A}_n = ((a_{ih}^{(n)}))$ e dei vettori $f_n = \begin{pmatrix} f(x_0^{(n)}) \\ \vdots \\ f(x_n^{(n)}) \end{pmatrix}$ sono stati calcolati rispettivamente con certi errori $\alpha_{ih}^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$, eravamo in realtà portati a risolvere, invece del sistema (2) questo altro

$$(\mathrm{A}_n + \alpha_n)\,\hat{c}_n = f_n + \beta_n \tag{3}$$

dove i vettori $c_n, \hat{c}_n, f_n, \beta_n \in \mathrm{R}_{n+1}$, mentre le matrici $\mathrm{A}_n, \alpha_n$, come operatori $(\mathrm{R}_{n+1} \to \mathrm{R}_{n+1})$, si considerano appartenenti ad uno spazio lineare normato con la norma spettrale.

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1974.

Costruite poi le matrici

$$P_n = \left(\left(\int_a^b \mu(x)\, p_i(x)\, p_h(x)\, dx\right)\right), \qquad (i, h = 0, 1, \cdots, n)$$

si fissava l'attenzione sulla successione non crescente a termini positivi $\{\lambda_1^{(n)}\}$, dove $\lambda_1^{(n)}$ è il primo autovalore della $P_n$, risultando necessariamente

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} = \lambda_1 \geq 0.$$

Si era poi dimostrato [2] il seguente criterio di stabilità: *se* $\lambda_1 > 0$ *esistono tre numeri positivi* $q$, $r$, $s$ *(indipendenti da* $n$ *e* $f$*) ed un indice* $n_0$ *tale che, per* $n > n_0$, $\| \alpha_n \|_{sp} \leq s$ *e* $\forall f$, *il sistema* (3) *ammette soluzione unica risultando inoltre*:

$$\| u_n - \hat{u}_n \|_2 \leq q \| u_n \|_2 \| \alpha_n \|_{sp} + r \| \beta_n \|_{R_{n+1}} . \tag{4}$$

Nel corso della dimostrazione si erano introdotte le matrici triangolari $G_n$ che ortonormalizzano i $\{p_h(x)\}_{h\in N}$ $\left(\text{e di conseguenza } \| G_n \|_{sp} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}}\right)$, per mezzo delle quali si definivano:

$$\begin{cases} b_n = (G_n')^{-1} c_n \quad , & \hat{b}_n = (G_n')^{-1} \hat{c}_n , \\ A_n G_n' = B_n \quad , & \alpha_n G_n' = \tilde{\alpha}_n \quad , \end{cases} \tag{5}$$

in modo che le (2), (3) diventavano

$$B_n b_n = f_n , \tag{6}$$

$$(B_n + \tilde{\alpha}) \hat{b}_n = f_n + \beta_n , \tag{7}$$

avendosi inoltre

$$\| u_n \|_2 = \| b_n \|_{R_{n+1}} . \tag{8}$$

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA. *La condizione* $\lambda_1 > 0$ *è necessaria per la stabilità del metodo di collocazione.*

In quanto segue si costruiranno due successioni $\{f_n\}$, $\{\alpha_n\}$ con $\| \alpha_n \|_{sp} < s$ (sotto la ulteriore ipotesi $\beta_n = 0 \ \forall n$) per le quali risulterà

$$\| u_n - \hat{u}_n \|_2 \geq \gamma_n \| u_n \|_2 \| \alpha_n \|_{sp} , \tag{9}$$

$$\text{con} \quad \gamma_n = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}}\right), \qquad \text{per} \quad n \to \infty .$$

Il nostro teorema sarà una immediata conseguenza della (9) giacché, se fosse $\lim \lambda_1^{(n)} = \lambda_1 = 0$, non esisterebbe un valore $q$ per il quale la (4) sia soddisfatta $\forall f$.

Prima della costruzione delle successioni alle quali ci siamo riferiti, osserviamo che, tenendo conto della (8), si può arrivare alla (9) costruendo invece della $\{f_n\}$ una successione $\{b_n\}$ che, assieme alla $\{\alpha_n\}$, soddisfi la

$$(9') \qquad \| b_n - \hat{b}_n \| \geq \gamma_n \| b_n \|_2 \| \alpha_n \|_{sp} , \qquad \text{con} \quad \gamma_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}}\right) \qquad \text{per} \quad n \to \infty .$$

Ci sarà utile, inoltre, osservare che dalle (6), (7) e (5) segue

$$(10) \qquad b_n - \hat{b}_n = (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} \tilde{\alpha}_n b_n = (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} \alpha_n G_n' b_n .$$

Passiamo a costruire la $\{b_n\}$. Sia dunque $\{b_n\}$ una successione di vettori, di norma unitaria, per i quali i $\{G_n'\}$ risultino subordinati, cioè tali da aversi

$$(11) \qquad \| G_n' b_n \|_{sp} = \| G_n' \|_{sp} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} .$$

Si consideri poi un'altra successione di vettori di norma unitaria $\{d_n\}$; si potranno così determinare gli $\{\alpha_n\}$ in modo da soddisfare la

$$(12) \qquad \alpha_n G_n' b_n = \frac{1}{n} d_n$$

risultando, in conseguenza della (11) e della proprietà della norma spettrale

$$(13) \qquad \| \alpha_n \|_{sp} = \frac{1}{n} \sqrt{\lambda_1^{(n)}} .$$

Se si aggiunge alla scelta dei $\{d_n\}$ la ulteriore condizione che i $\{(B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1}\}$ siano ad essi subordinati, si avrà dalle (10), (12):

$$(14) \qquad \| b_n - \hat{b}_n \|_{R_{n+1}} = \| (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} \alpha_n G_n' b_n \|_{R_{n+1}} \frac{1}{n} \| (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} \|_{sp}$$

e, dalla (13):

$$(15) \qquad \| b_n - \hat{b}_n \|_{R_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} \| (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} \|_{sp} \| \alpha_n \|_{sp} .$$

Per studiare le $\| (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} \|_{sp}$ si tenga presente che

$$(16) \qquad (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} = (I_n + B_n^{-1} \tilde{\alpha}_n)^{-1} B_n^{-1}$$

ed inoltre

$$(17) \qquad \| (I_n + B_n^{-1} \tilde{\alpha}_n)^{-1} B_n^{-1} \|_{sp} \geq \frac{\| B_n^{-1} \|_{sp}}{\| I_n + B_n^{-1} \tilde{\alpha}_n \|_{sp}} .$$

Poiché i $B_n^{-1}$ sono equiuniformemente limitati in norma (vedi nota [2]), dalla (13) segue che si possono considerare gli $\alpha_n$ con norma piccola a piacere;

la stessa proprietà segue dalla (5) per le $\tilde{\alpha}_n$, onde si può assicurare, per $n$ maggiore di un opportuno $n_0$, la validità della

$$\frac{1}{\| I_n + B_n^{-1} \tilde{\alpha}_n \|_{sp}} \geq \frac{1}{2} . \tag{18}$$

Infine sarà senz'altro

$$\| B_n^{-1} \|_{sp} > Q > 0 , \tag{19}$$

giacché dalle (6) e (8) si trae

$$\| u_n \|_2 = \| b_n \|_{R_{n+1}} = \| B_n^{-1} f_n \|_{R_{n+1}} ,$$

cosicché negare la (19) implicherebbe per ogni $f$ la convergenza a zero di $\| u_n \|_2$ contro quanto è stato dimostrato nella Nota [1].

Si arriva così, riunendo (15), (16), (17), (18) e (19) alla

$$\| b_n - \hat{b}_n \|_2 \geq \frac{Q}{2\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} \cdot \| \alpha_n \|_{sp}$$

dove $\gamma_n = \dfrac{Q}{2\sqrt{\lambda_1^{(n)}}}$ gode della proprietà richiesta nella (9′), c.d.d.

## BIBLIOGRAFIA


[1] E. ROFMAN (1970) – *Teoremi di convergenza del metodo di collocazione*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», (8), *49*, 184–189.

[2] E. ROFMAN (1972) – *Un criterio di stabilità nel metodo di collocazione*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», (8), *52*, 879–883.