Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gerard Hecquet

A propos d'un article de Dan Petrovanu sur les solutions périodiques d'un système aux différentielles totales

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.1-2, p. 40–47.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_1-2_40_0>

Sistemi ai differenziali totali. — *A propos d'un article de Dan Petrovanu sur les solutions périodiques d'un système aux différentielles totales.* Nota di GÉRARD HECQUET, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Questa Nota completa una ricerca di Dan Petrovanu sulle soluzioni periodiche del sistema ai differenziali totali

$$dz = A(u, v, z)\, du + B(u, v, z)\, dv$$

nel quale u e v sono delle variabili reali, A, B e z delle funzioni vettoriali definite in $\mathbf{R}^n$.

Cette Note complète l'étude de Dan Petrovanu [1] concernant le système aux différentielles totales:

$$dz = A(u, v, z)\, du + B(u, v, z)\, dv$$

dans lequel u et v sont des variables réelles, A, B et z des fonctions vectorielles définies dans $\mathbf{R}^n$. La norme de z dans $\mathbf{R}^n$ sera définie par $\| z \| = \Sigma |z_i|$.

1. PÉRIODICITÉ PAR RAPPORT À UNE VARIABLE

PROPOSITION 1. *Sous les hypothèses h_1, h_2, h_3 suivantes:*

h_1) *Les constantes* T, a *positives*, m_0, M_1, M_2, L *et* P *positives ou nulles vérifient la relation*:

$$m_0 + M_2\, a + M_1 \frac{T}{2} \leq P.$$

h_2) *Les fonctions vectorielles* $A : A(u, v, z)$, $B : B(u, v, z)$ *définies et continues sur* $\mathcal{R}_1 = \{(u, v, z) \in \mathbf{R}^{n+2}, |v| \leq a, \|z\| \leq P\}$ *ainsi que leurs dérivées partielles* A_v, A_z, B_u, B_z *satisfont identiquement sur* $\mathcal{R}_1$ *les relations*

$$(1.1.) \quad \begin{cases} A(u+T, v, z) = A(u, v, z) \qquad B(u+T, v, z) = B(u, v, z) \\ \| A(u, v, z) - A(u, v, \bar{z}) \| \leq L \| z - \bar{z} \| \qquad \| A(u, v, z) \| \leq M_1 \\ \| B(u, v, z) - B(u, v, \bar{z}) \| \leq L \| z - \bar{z} \| \qquad \| B(u, v, z) \| \leq M_2 \\ \dfrac{\partial A}{\partial v}(u, v, z) + \dfrac{\partial A}{\partial z}(u, v, z) \cdot B(u, v, z) = \\ \qquad = \dfrac{\partial B}{\partial u}(u, v, z) + \dfrac{\partial B}{\partial z}(u, v, z) \cdot A(u, v, z). \end{cases}$$

(*) Nella seduta del 29 giugno 1974.

h_3) *Il existe un vecteur* c *de* $\mathbf{R}^n$ ($\| c \| \leq m_0$) *pour lequel l'équation intégrale*

$$q(x) = c + \int_0^x \mathrm{A}(u, 0, q(u))\, du \tag{1.2}$$

admette une solution $\bar{q}$ *périodique de période* T *telle que*

$$\| \bar{q} \| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \| \bar{q}(x) \| \leq m_0 + \mathrm{M}_1 \frac{\mathrm{T}}{2}\,.$$

Il existe une fonction vectorielle $\Phi : \Phi(u, v)$ *unique, définie et continue ainsi que ses dérivées partielles* Φ_u, Φ_v *sur* $\mathscr{A} = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2, | v | \leq a\}$ *telle que*

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(0, 0) = c \qquad \Phi(u + \mathrm{T}, v) = \Phi(u, v) \\ d\Phi(u, v) = \mathrm{A}(u, v, \Phi(u, v))\, du + \mathrm{B}(u, v, \Phi(u, v))\, dv. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{H} = \{\varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{A}, \mathbf{R}^n) : \varphi(u+\mathrm{T}, v) = \varphi(u, v), \varphi(u, 0) = \bar{q}(u)\}$ normé par $\| \varphi \| = \sup_{\mathscr{A}} \{| \varphi(u, v) | e^{-\lambda |v|}\}$ avec $\lambda > \mathrm{L}$.

Désignons par $\mathscr{F}$ l'application $\varphi \to \psi = \mathscr{F}\varphi$

$$\psi(u, v) = c + \int_0^u \mathrm{A}(x, 0, \varphi(x, 0))\, dx + \int_0^v \mathrm{B}(u, y, \varphi(u, y))\, dy$$

ou

$$\psi(u, v) = \bar{q}(u) + \int_0^v \mathrm{B}(u, y, \varphi(u, y))\, dy\,.$$

Nous en déduisons $\psi(u, 0) = \bar{q}(u)$, $\psi(u + \mathrm{T}, v) = \psi(u, v)$ et

$$\| \psi(u, v) \| \leq \| \bar{q}(u) \| + \mathrm{M}_2 a \leq m_0 + \mathrm{M}_1 \frac{\mathrm{T}}{2} + \mathrm{M}_2 a \leq \mathrm{P}\,.$$

D'autre part

$$\| \psi(u, v) - \bar{\psi}(u, v) \| \leq \left\| \int_0^v | \mathrm{B}(u, y, \varphi(u, y)) - \mathrm{B}(u, y, \bar{\varphi}(u, y)) \right\| dy \leq$$

$$\leq \mathrm{L} \| \psi - \bar{\varphi} \| \int_0^{|v|} e^{\lambda y}\, dy \leq \mathrm{L}\lambda^{-1} \| \varphi - \varphi \|\,.$$

L'application $\mathscr{F}$ est donc une contraction, l'équation $\varphi = \mathscr{F}\varphi$ possède une et une seule solution.

Soit $\varphi_0(u, v) = \bar{q}(u)$, $\varphi_n = \mathscr{F}\varphi_{n-1}$ $n \geq 1$ la suite des approximations successives, convergente vers la solution φ, nous avons $| \varphi_1(u, v) - \varphi_0(u, v) | \leq$

$\leq M_2 \mid v \mid$ puis pour $n > 1$:

$$\left| \varphi_n (u, v) - \varphi_{n-1} (u, v) \right| \leq L \left| \int_0^v \left| \varphi_{n-1} (u, y) - \varphi_{n-2} (u, y) \right| dy \right|$$

ou

$$\left| \varphi_n (u, v) - \varphi_{n-1} (u, v) \right| \leq M_2 \frac{L^{n-1} \mid v \mid^n}{n!} .$$

D'autre part

$$\left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} (u, v) - B (u, v, \varphi_n (u, v)) \right| \leq L \left| \varphi_n (u, v) - \varphi_{n-1} (u, v) \right|$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} (u, v) - B (u, v, \varphi_n (u, v)) \right| \leq M_2 \frac{L^n \mid v \mid^n}{n!} .$$

Reste à examiner $\frac{\partial \varphi_n}{\partial u} (u, v) - A (u, v, \varphi_n (u, v))$; possons comme Dan Petrovanu

$$A_n (u, v) = A (u, v, \varphi_n (u, v))$$

et

$$B_n (u, v) = B (u, v, \varphi_n (u, v)).$$

Nous avons:

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial u} (u, v) = A_{n-1} (u, 0) +$$
$$+ \int_0^v \left[\frac{\partial B}{\partial u} (u, y, \varphi_{n-1} (u, y)) + \frac{\partial B}{\partial z} (u, y, \varphi_{n-1} (u, y)) \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} (u, y) \right] dy$$

puis en substituant la valeur de $\partial B / \partial u$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial u} (u, v) - A_n (u, v) = A_{n-1} (u, 0) - A_n (u, v) + A_{n-1} (u, v) - A_{n-1} (u, 0) +$$
$$+ \int_0^v \frac{\partial A}{\partial z} (u, y, \varphi_{n-1} (u, y)) \cdot \left[B_{n-1} (u, y) - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v} (u, y) \right] dy +$$
$$+ \int_0^v \frac{\partial B}{\partial z} (u, y, \varphi_{n-1} (u, y)) \cdot \left[\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} (u, y) - A_{n-1} (u, y) \right] dy \cdot$$

Soit

$$M_3 = \operatorname{Max} \left\{ \sup_{\mathscr{R}_1} \left| \frac{\partial A}{\partial z} (u, v, z) \right|, \sup_{\mathscr{R}_1} \left| \frac{\partial B}{\partial z} (u, v, z) \right| \right\}$$

et

$$L' = \operatorname{Max} \{ M_2, M_3, M_2, L M_3, 1 \} .$$

On en déduit comme Dan Petrovanu:

$$\left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial u}(u, v) - A_n(u, v) \right| \leq 2 \cdot \frac{(2\,L' \,|\, v\,|)^n}{n!} \quad n \geq 1$$

et

$$\left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial u}(u, v) - A_0(u, v) \right| = 0 .$$

Cette dernière relation assure la convergence uniforme de la suite $\frac{\partial \varphi_n}{\partial u}(u, v)$ vers $A(u, v, \varphi(u, v))$ et termine la démonstration de la Proposition 1.

Remarque 1. En supposant que la fonction A vérifie la condition supplémentaire $A(-u, 0, q) = -A(u, 0, q)$ on peut affirmer l'existence pour tout vecteur $c : |c| \leq m_0$ d'une fonction Φ telle que:

$$\begin{cases} \Phi(0, 0) = c \qquad \Phi(u + T, v) = \Phi(u, v) \qquad \Phi(-u, 0) = \Phi(u, 0) \\ d\Phi(u, v) = A(u, v, \Phi(u, v))\, du + B(u, v, \Phi(u, v))\, dv. \end{cases}$$

2. PÉRIODICITÉ PAR RAPPORT AUX DEUX VARIABLES

PROPOSITION 2. *Sous les hypothèses* h_1', h_2', h_3' *suivantes*:

h_1') *Les constantes* T *positive,* m_0, M_1, M_2, L *et* P *positives ou nulles vérifient la relation:*

$$m_0 + (M_1 + M_2)\frac{T}{2} \leq P.$$

h_2') *Les fonctions vectorielles* $A : A(u, v, z)$, $B : B(u, v, z)$ *définies et continues sur* $\mathcal{R}_2 = \{(u, v, z) \in \mathbf{R}^{n+2} : |z| \leq P\}$ *ainsi que leurs dérivées partielles* A_v, A_z, B_u, B_z *satisfont identiquement sur* $\mathcal{R}_2$ *les relations*

$$(2.1) \quad \begin{cases} A(u + T, v, z) = A(u, T + v, z) = A(u, v, z) \\ B(u + T, v, z) = B(u, T + v, z) = B(u, v, z) \\ |A(u, v, z) - A(u, v, \bar{z})| \leq L\,|z - \bar{z}|, \qquad |A(u, v, z)| \leq M_1 \\ |B(u, v, z) - B(u, v, \bar{z})| \leq L\,|z - z|, \qquad |B(u, v, z)| \leq M_2 \\ \frac{\partial A}{\partial v}(u, v, z) + \frac{\partial A}{\partial z}(u, v, z) \cdot B(u, v, z) = \\ \qquad = \frac{\partial B}{\partial u}(u, v, z) + \frac{\partial B}{\partial z}(u, v, z) \cdot A(u, v, z). \end{cases}$$

h_3') *Il existe un vecteur c de* R^n ($\|c\| \leq m_0$) *pour lequel les équations intégrales*:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} q_1(x) = c + \int_0^x \mathrm{A}(u, 0, q_1(u))\, du \\ q_2(x) = c + \int_0^x \mathrm{B}(0, v, q_2(v))\, dv \end{cases}$$

admettent des solutions $\bar{q}_1, \bar{q}_2$ *périodiques de période* T *telles que:*

$$\|\bar{q}_i\| = \sup \|\bar{q}_i(x)\| \leq \mathrm{M}_i \frac{\mathrm{T}}{2} + m_0 \qquad (i = 1, 2).$$

Il existe une fonction Φ vectorielle unique définie et continue ainsi que ses dérivées partielles Φ_u, Φ_v sur R^2 *telle que*

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \Phi(0, 0) = c \qquad \Phi(u + \mathrm{T}, v) = \Phi(u, v + \mathrm{T}) = \Phi(u, v) \\ d\Phi(u, v) = \mathrm{A}(u, v, \Phi(u, v))\, du + \mathrm{B}(u, v, \Phi(u, v))\, dv. \end{cases}$$

Démonstration. Posons $\varphi_0(u, v) = \bar{q}_1(u) + \bar{q}_2(v) - c$ et définissons la suite $\varphi_n(u, v) = \underline{q}_1(u) + \int_0^v \mathrm{B}(u, y, \varphi_{n-1}(u, y))\, dy \; n \geq 1$; les fonctions φ_n sont évidemment périodiques en u, et la démonstration de la proposition précédente permet d'écrire que la suite φ_n converge vers une fonction φ telle que: $\varphi(u + \mathrm{T}, v) = \varphi(u, v)$,

$$\varphi(u, v) = \bar{q}_1(u) + \int_0^v \mathrm{B}(u, y, \varphi(u, y))\, dy$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) = \mathrm{A}(u, v, \varphi(u, v)) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v) = \mathrm{B}(u, v, \varphi(u, v)).$$

Remarquons en outre que

$$\varphi_n(0, v) = c + \int_0^v \mathrm{B}(0, y, \varphi_{n-1}(0, y))\, dy = \varphi_0(0, v) = \bar{q}_2(v),$$

donc

$$\varphi(0, v) = \bar{q}_2(v).$$

Si maintenant nous considérons la suite ψ_n définie par

$$\psi_0(u, v) = \varphi_0(u, v) = \bar{q}_1(u) + \bar{q}_2(v) - c$$

$$\psi_n(u, v) = \bar{q}_2(v) + \int_0^u \mathrm{A}[x, v, \psi_{n-1}(x, v)]\, dx$$

cette suite converge vers une fonction ψ périodique en v solution unique de l'équation

$$\psi(u, v) = \bar{q}_2(v) + \int_0^u A[x, v, \psi(x, v)]\, dx$$

telle que

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) = A(u, v, \psi(u, v)) \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) = B(u, v, \psi(u, v))$$

et

$$\psi(u, 0) = \varphi(u, 0) = \bar{q}_1(u).$$

La Proposition 2 sera entièrement prouvée si $\psi \equiv \varphi$. Or

$$\varphi_u(u, v) = A(u, v, \varphi(u, v))$$

$$\psi_u(u, v) = A(u, v, \psi(u, v))$$

donc

$$|\psi_u(u, v) - \varphi_u(u, v)| \leq L\, |\varphi(u, v) - \varphi(u, v)|.$$

En posant $E(u, v) = |\varphi_u(u, v) - \psi_u(u, v)|$ nous avons

$$E(u, v) \leq L \left| \int_0^u E(x, v)\, dx \right|$$

c'est-à-dire $E(u, v) = 0$.

De la même façon $\varphi_v(u, v) - \psi_v(u, v) = 0$.

Ainsi $\varphi(u, v) = \psi(u, v)$ pour tout (u, v) et la Proposition 2 est démontrée.

Il est à remarquer que l'hypothèse $\boldsymbol{h}_3'$) est nécessaire puisqu'une solution quelconque du système.

$$d\Phi = A(u, v, \Phi)\, du + B(u, v, \Phi)\, dv$$

vérifie les relations

$$\Phi(u, 0) = \Phi(0, 0) + \int_0^u A[x, 0, \Phi(x, 0)]\, dx$$

$$\Phi(0, v) = \Phi(0, 0) + \int_0^v B[0, y, \Phi(0, y)]\, dy.$$

COROLLAIRE. (Dan Petrovanu).

Sous les hypothèse $\boldsymbol{h}_1'$, $\boldsymbol{h}_2''$ *suivantes*

$\boldsymbol{h}_1'$) *comme dans la proposition 2;*

$\boldsymbol{h}_2''$) *En plus de l'hypothèse* $\boldsymbol{h}_2'$) *les fonctions* A *et* B *satisfont sur* $\mathcal{R}_2$ *la relation:*

$$A(-u, 0, z) \leq -A(u, 0, z) \quad , \quad B(0, -v, z) = -B(0, v, z).$$

Il existe pour tout vecteur c ($\| c \| \leq m_0$) *une fonction* Φ *telle que*:

$$\text{(2-4)} \qquad \begin{cases} \Phi(u+\mathrm{T}, v) = \Phi(u, v) = \Phi(u, v+\mathrm{T}) \qquad \Phi(0, 0) = c \\ \Phi(-u, 0) = \Phi(u, 0) \qquad \Phi(0, -v) = \Phi(0, v) \\ d\Phi(u, v) = \mathrm{A}(u, v, \Phi(u, v))\, du + \mathrm{B}(u, v, \Phi(u, v))\, dv. \end{cases}$$

3. Conclusion

Comme il est facile de voir, les considérations développées précédemment peuvent être transposées sans aucune difficulté aux systèmes généraux en r variables indépendantes:

$$\text{(3.1)} \qquad dz = \sum_{i=0}^{r} \mathrm{A}_i(u_1, \cdots, u_r, z)\, du_i$$

pour lesquels on a le théorème suivant dont la démonstration est semblable à celle des Propositions 1 et 2.

Théorème. (*Périodicité par rapport aux* p *premières variables*). *Sous les hypothèses* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$ *suivantes.*

H1) *Les constantes* $\mathrm{T}, a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots, a_r$ *positives*, $m_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_r$, L, P *positives ou nulles vérifient la relation*

$$m_0 + (\mathrm{M}_1 + \cdots + \mathrm{M}_r)\frac{\mathrm{T}}{2} + (\mathrm{M}_{p+1}\, a_{p+1} + \cdots + \mathrm{M}_p\, a_r) \leq \mathrm{P}.$$

(*Si* $p = r$ *les constantes* $a_{p+1}, \cdots, a_r$ *ne sont pas définies*).

H2) *Les* r *fonctions vectorielles* $\mathrm{A}_i : \mathrm{A}_i(u_1, u_2, \cdots, u_r, z)$ *définies et continues sur*

$$\mathcal{R} = \{(u_1, \cdots, u_r, z) \in \mathbf{R}^{r+n}, |u_{p+1}| \leq a_{p+1}, \cdots, |u_r| \leq a_r, \|z\| \leq \mathrm{P}\}$$

ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial z}, \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial u_j}$ ($j \neq i$) *satisfont identiquement sur* $\mathcal{R}$ *les relations*:

$$\text{(3-1)} \qquad \begin{cases} \mathrm{A}_i(u_1, u_2, \cdots, u_r, z) = \mathrm{A}_i(u_1+\mathrm{T}, u_2, \cdots, u_r, z) = \cdots = \\ \qquad = \mathrm{A}_i(u_1, \cdots, u_p+\mathrm{T}, \cdots, u_r, z) \\ \frac{\partial \mathrm{A}_j}{\partial u_i} + \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial z} \cdot \mathrm{A}_i = \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \mathrm{A}_j}{\partial z} \cdot \mathrm{A}_j \qquad (i \neq j) \\ \| \mathrm{A}_i(u_1, \cdots, u_r, z) - \mathrm{A}_i(u_1, \cdots, u_r, \bar{z}) \| \leq \mathrm{L} \| z - \bar{z} \| \\ \| \mathrm{A}_i(u_1, \cdots, u_r, z) \| \leq \mathrm{M}_i. \end{cases}$$

H3) *Il existe un vecteur c de* $\mathbf{R}^n$ ($\| c \| \leq m_0$) *pour lequel les p équations intégrales*:

$$i \in \{1, \cdots, p\}, \; q_i(x) = c + \int_0^x A_i(0, \cdots, 0, u, 0, \cdots, q_i(u))\, du$$

admettent des solutions $\bar{q}_i$ périodiques de période T *telles que*

$$\| \bar{q}_i(x) \| \leq m_0 + M_i \frac{T}{2} \qquad i \in \{1, \cdots, p\}.$$

Il existe une fonction Φ vectorielle unique définie et continue ainsi que ses dérivées partielles $\Phi_{u_1}, \cdots, \Phi_{u_r}$, sur $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A} = \{(u, \cdots, u_r) \in \mathbf{R}^n, \; | u_{p+1} | \leq a_{p+1}, \cdots, | u_r | \leq a_r\}$$

telle que

$$(3\text{-}2) \quad \begin{cases} \Phi(0, 0) = c \\ \Phi(u_1, \cdots, u_r) = \Phi(u_1 + T, u_2, \cdots, u_r) = \cdots = \\ \qquad = \Phi(u_1, \cdots, u_p + T, u_{p+1}, \cdots, u_r) \\ d\Phi(u_1, \cdots, u_r) = \sum_{i=1}^{r} A_i \, | u_1, \cdots, u_r, \Phi(u_1, \cdots, u_r) | \, du_r . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAN PETROVANU (1969) – *Solutions périodiques de certaines équations aux dérivées partielles*, « Annali di Matematica Pura ed Applicata », *82*, 83–96.