Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tullio Valent

Sulla formulazione variazionale - espressa nello stress - del problema dell'equilibrio dei corpi elastici con un vincolo eli appoggio unilaterale liscio. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.6, p. 924–930.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_924_0>

Fisica matematica. — *Sulla formulazione variazionale – espressa nello stress – del problema dell'equilibrio dei corpi elastici con un vincolo di appoggio unilaterale liscio* (*). Nota II di TULLIO VALENT, presentata (**) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — We study the analytical problems connected with a variational formulation—expressed in terms of the stress—of the elastostatic problem when an unilateral supporting constraint without friction is present.

Such a formulation is compared with a variational one expressed in terms of the displacement.

This Nota II is the second section of the paper; the first section appears in Nota I, issue n. 5 of this volume.

Si continua lo studio del problema posto nella Nota I, [vedi fasc. n. 5 di questo volume].

4. CARATTERIZZAZIONE DELLO «STRESS REALE» NEL CONVESSO Γ

Osserviamo che

LEMMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $\sigma \in \Gamma$ *renda minimo* $\mathcal{F}$ *in* Γ *è che*

$$a(\sigma, \tau - \sigma) \geq 0 \qquad \forall \tau \in \Gamma . \tag{14}$$

Infatti: poichè $\mathcal{F}(\tau) - \mathcal{F}(\sigma) = a(\sigma, \tau - \sigma) + \frac{1}{2} a(\tau - \sigma, \tau - \sigma)$, da $a(\sigma, \tau - \sigma) \geq 0$ $\forall \tau \in \Gamma$ segue $\mathcal{F}(\tau) - \mathcal{F}(\sigma) > 0$ $\forall \tau \in \Gamma$ tali che $\tau \neq \sigma$ viceversa, se $\mathcal{F}(\tau) - \mathcal{F}(\sigma) > 0$ $\forall \tau \in \Gamma$ tale che $\tau \neq \sigma$, la funzione $\psi_\tau : t \to \mathcal{F}(\sigma + t(\tau - \sigma))$, $0 \leq t \leq 1$, ha un minimo per $t = 0$ e quindi, essendo $\psi'_\tau(0) = a(\sigma, \tau - \sigma)$, risulta $a(\sigma, \tau - \sigma) \geq 0$ $\forall \tau \in \Gamma$.

Il teorema che segue costituisce la parte più interessante del presente lavoro, soprattutto per il suo notevole significato meccanico con riferimento al problema elastostatico posto in 2 (nella Nota I).

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè, in corrispondenza di* $\sigma \in \Gamma$, *esista* $u \in V$ *tale che* $\varepsilon_{ij}(u) = -a_{ijhk}\,\sigma_{hk}$, $(\sigma, \varepsilon(u)) + F(u) = 0$ *è che* σ *renda minimo* $\mathcal{F}$ *in* Γ.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 28 maggio 1974.

La giustificazione della necessità della condizione non presenta particolari difficoltà. Infatti, se esiste $u \in V$ verificante (5), (6), si ha, per ogni $\tau \in \Gamma$,

$$a(\sigma, \tau - \sigma) = \int_\Omega a_{ijhk}\,\sigma_{hk}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})\,dx = (\sigma - \tau, \varepsilon(u)) = (\sigma, \varepsilon(u)) - (\tau, \varepsilon(u)) =$$

$$= [(\sigma, \varepsilon(u)) + F(u)] - [(\tau, \varepsilon(u)) + F(u)] = -[(\tau, \varepsilon(u)) + F(u)] \geq 0\,;$$

pertanto, visto il Lemma 2, σ rende minimo $\mathcal{F}$ in Γ.

Tutt'altro che banale sarà, invece, la dimostrazione della sufficienza della condizione espressa in II; del resto tale sufficienza è, evidentemente, la parte più significativa del teorema.

L'ipotesi è che $\sigma \in \Gamma$ rende minimo $\mathcal{F}$ in Γ, cioè – per il Lemma 2 – che sussiste (14). Posto

$$\zeta_{ij} = -a_{ijhk}\,\sigma_{hk} \quad , \quad \xi = \tau - \sigma \quad , \quad \varphi(v) = -[(\sigma, \varepsilon(v)) + F(v)]\,,$$

$K = \{\xi \in S : (\xi, \varepsilon(v)) \leq \varphi(v)\ \forall v \in V\}$, si riconosce senza difficoltà che (14) equivale a

$$(15) \qquad (\zeta, \xi) \leq 0 \qquad \forall \xi \in K\,.$$

In particolare risulta $(\zeta, \xi) = 0$ $\forall \xi \in S$ tale che $(\xi, \varepsilon(v)) = 0$ $\forall v \in V$; ciò implica $\zeta \in \varepsilon(H)$ dato che, stante (1), $\varepsilon(H)$ è chiuso [1] in S.

Dobbiamo dimostrare che risulta addirittura

$$(16) \qquad \zeta \in \{\varepsilon(v) : v \in V, \varphi(v) = 0\}\,.$$

A tale scopo conviene fare le seguenti posizioni:

$$K_0 = \{\varepsilon(v) : v \in V, \varphi(v) = 0\} \quad , \quad K_1 = \{\varepsilon(v) : v \in V, \varphi(v) = 1\}\,,$$

$$K_0^0 = \{\xi \in S : (\xi, \varepsilon(v)) \leq 1 \quad \forall \varepsilon(v) \in K_0\} = \{\xi \in S : (\xi, \varepsilon(v)) \leq 0 \quad \forall \varepsilon(v) \in K_0\}$$

$$K_1^0 = \{\xi \in S : (\xi, \varepsilon(v)) \leq 1 \quad \forall \varepsilon(v) \in K_1\}\,.$$

K_0 è un cono convesso di S, K_0^0 è il (cono convesso chiuso) *polare* di K_0; K_1 è un convesso di S e K_1^0 è il (convesso chiuso) *polare* di K_1.

Si riconosce facilmente che $K = K_0^0 \cap K_1^0$.

La dimostrazione di (16) risulterà più agevole una volta stabiliti i seguenti lemmi:

LEMMA 3. *Se* $\mathcal{R} \cap V = \mathcal{R}^*$, *il cono convesso* $\varepsilon(V)$ *è chiuso in* S.

LEMMA 4. K_0 *è chiuso in* S.

(1) Perché $\varepsilon(H)$ è isomorfo topologicamente a $H/\mathcal{R}$; infatti l'isomorfismo $[v] \to \varepsilon(v)$ di $H/\mathcal{R}$ *su* $\varepsilon(H)$ è bicontinuo in quanto, a causa di (1) si ha

$$\|\varepsilon(v)\|_S \leq \|[v]\|_{H/\mathcal{R}} = \inf_{r \in \mathcal{R}} \|v + r\|_H \leq (1 + k_1)\,\|\varepsilon(v)\|_S \qquad \forall v \in H\,.$$

LEMMA 5. *Se* $\mathcal{R} \cap V \neq \mathcal{R}^*$, *la chiusura in* S *del cono convesso di* S *generato da* K (cioè il più piccolo cono convesso chiuso di S contenente K) *coincide con* K_0^0.

Prima di dare la prova di questi tre lemmi, vediamo come essi permettono di mostrare rapidamente che (15) implica (16), cioè $\zeta \in K_0$.

(*a*) Sia $\mathcal{R} \cap V = \mathcal{R}^*$. (15) implica $(\zeta, \xi) \leq 0$ qualunque sia $\xi \in S$ tale che $(\xi, \varepsilon(v)) \leq 0$ $\forall v \in V$, ossia $\zeta \in \varepsilon(V)^{00} =$ bipolare di $\varepsilon(V)$.

Poichè il cono convesso $\varepsilon(V)$ è – per il Lemma 3 – chiuso in S, esso coincide con il suo bipolare, in base ad una nota proprietà dell'Analisi convessa; di conseguenza $\zeta \in \varepsilon(V)$.

Ma allora, necessariamente, $\zeta \in K_0$: sia, infatti, $\zeta = \varepsilon(u)$, $u \in V$; deve risultare $(\zeta, \xi) = (\varepsilon(u), \xi) \leq 0$ qualunque sia $\xi \in S$ tale che $(\xi, \varepsilon(v)) = \varphi(v)$ $\forall v \in V$ e ciò sarebbe impossibile se fosse $\varphi(u) > 0$.

(*b*) Sia $\mathcal{R} \cap V \neq \mathcal{R}^*$. $(\zeta, \xi) \leq 0$ $\forall \xi \in K$ implica, ovviamente, $(\zeta, \xi) \leq 0$ per ogni ξ appartenente alla chiusura del cono convesso generato da K; quindi – per il Lemma 5 – $(\zeta, \xi) \leq 0$ $\forall \xi \in K_0^0$, cioè $\zeta \in K_0^{00} =$ polare di K_0^0.

Poichè – per il Lemma 4 – K_0 è chiuso in S, si ha $K_0 = K_0^{00}$, epperò $\zeta \in K_0$.

Dimostrazione del Lemma 3. Si tratta di provare che, se $\mathcal{R} \cap V = \mathcal{R}^*$ e $\{\varepsilon(v^k)\}$ è una successione in $\varepsilon(V)$ convergente in S, il limite di tale successione appartiene a $\varepsilon(V)$.

Poichè, chiaramente, $\varepsilon(V) = \{\varepsilon(v) : v \in V, P^*(v) = 0\}$, non è restrittivo supporre $P^*(v^k) = 0$. $\{\varepsilon(v^k)\}$, in quanto convergente in S, è limitata in norma; scritto v^k nella forma $v^k = e^k + r^k$, ove e^k è la parte equilibrata in Ω di v^k e $r^k \in \mathcal{R}$, ne consegue – in virtù di (1) – che la successione $\{\|e^k\|_H\}$ è limitata.

Procedendo come nella dimostrazione del Lemma 1 e tenendo presente che $\mathcal{R} \cap V = \mathcal{R}^*$, si trova che, allora, anche la successione $\{\|v^k\|_H\}$ è limitata.

Di conseguenza da $\{v^k\}$ si può estrarre una successione $\{v^{k_s}\}$ debolmente convergente in H.

Detto v il limite di tale successione, risulta $v \in V$, perchè V, in quanto chiuso e convesso, è debolmente chiuso.

D'altra parte – tenendo presente che l'essere $\{v^{k_s}\}$ debolmente convergente a v in H implica l'essere $\{\varepsilon(v^{k_s})\}$ debolmente convergente a $\varepsilon(v)$ in S e ricordando che $\{\varepsilon(v^k)\}$, per ipotesi, converge in norma, e quindi debolmente, in S – si deduce $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(v^k) = \varepsilon(v)$. Donde la conclusione.

Dimostrazione del Lemma 4. Sia $\{\varepsilon(v^k)\}$ una successione in K_0 convergente in S. Essendo $\varepsilon(P^*(v^k)) = 0$, $\varphi(P^*(v^k)) = 0$, è lecito supporre $P^*(v^k) = 0$.

Poichè $\varphi(v^k) = (\sigma, \varepsilon(v^k)) + F(v^k) = 0$, la convergenza di $\{\varepsilon(v^k)\}$ implica la convergenza, e quindi la limitatezza, della successione numerica $\{F(v^k)\}$.

Si deve dimostrare che il limite della successione $\{\varepsilon(v^k)\}$ appartiene a K_0.

A tale scopo è sufficiente provare che $\{v^k\}$ è limitata in norma.

Infatti – in tale caso – dalla successione $\{v^k\}$ si può estrarne una debolmente convergente; detto v il suo limite, risulta $v \in V$ [perché V è debolmente chiuso], $\varphi(v) = 0$ [perché φ è una forma lineare continua su H e si ha $\varphi(v^k) = 0$] ed inoltre $\lim_{k \to \infty} \varepsilon(v^k) = \varepsilon(v)$ [cfr. la dimostrazione del Lemma 3].

Dimostriamo che $\{\|v^k\|_H\}$ è limitata.

Sia, per assurdo, $\{\|v^k\|_H\}$ non limitata: non è restrittivo, per quel che segue, supporre $\{\|v^k\|_H\}$ divergente, giacchè esistono delle sottosuccessioni di $\{\|v^k\|_H\}$ divergenti.

Poichè la successione $\{\varepsilon(v^k)\}$, in quanto convergente, è limitata in norma, con lo stesso procedimento utilizzato nella dimostrazione del Lemma 1 si riconosce che da $\{v^k\}$ si può estrarre una successione – sia $\{v^{k_s}\}$ – tale che

$$(17) \qquad \lim_{s \to \infty} \frac{v^{k_s}}{\|v^{k_s}\|_H} = r \in \mathscr{R} \cap V \quad , \quad P^*(r) = 0 \quad , \quad \|r\|_H = 1 .$$

Se $\mathscr{R} \cap V = \mathscr{R}^*$ si perviene ad una contraddizione [perchè $P^*(r) = 0$ comporta $r = 0$, mentre $\|r\|_H = 1$ comporta $r \neq 0$] e quindi $\{\|v^k\|_H\}$ è limitata [(2)].

Sia, pertanto, $\mathscr{R} \cap V \neq \mathscr{R}^*$.

Da (17), ricordando che F è lineare e continua, si trae

$$\lim_{s \to \infty} \frac{F(v^{k_s})}{\|v^{k_s}\|_H} = F(r) ;$$

d'altra parte, da $r \in \mathscr{R} \cap V$, $P^*(r) = 0$, $\|r\|_H = 1$ segue – per l'ipotesi fatta su F – che $F(r) < 0$. Ciò è in contraddizione con il fatto che $\{F(v^{k_s})\}$ è limitata e $\{\|v^{k_s}\|_H\}$ è divergente; se ne deduce che, anche in questo caso, $\{\|v^k\|_H\}$ è limitata.

Dimostrazione del Lemma 5. Osserviamo innanzitutto che, se $\mathscr{R} \cap V \neq \mathscr{R}^*$, risulta $K_0 \subset K_1$: considerato, infatti, $r_1 \in \mathscr{R} \cap V$ tale che $\varphi(r_1) = 1$, da $v \in V$, $\varphi(v) = 0$ segue $v + r_1 \in V$, $\varphi(v + r_1) = 1$, $\varepsilon(v + r_1) = \varepsilon(v)$.

Di conseguenza si ha $K_1^0 \subset K_0^0$ e quindi

$$(18) \qquad K = K_0^0 \cap K_1^0 = K_1^0 .$$

Poichè – come si riconosce agevolmente – K_0 è il più grande cono convesso chiuso contenuto in K_1, K_0^0 risulta essere il più piccolo cono convesso chiuso contenente K_1^0.

Essendo, per (18), $K_1^0 = K$, si conclude che K_0^0 è il più piccolo cono convesso chiuso contenente K, cioè che K_0^0 è la chiusura del cono convesso generato da K.

(2) Fatto, questo, già provato nel corso della dimostrazione del Lemma 3.

5. Esistenza del minimo per $\mathscr{F}$ in Γ

Mostriamo che

III. *Una condizione sufficiente affinchè* $\mathscr{F}$ *abbia minimo in* Γ *è che esista una costante positiva* c *tale da aversi* [3]

$$a(\tau, \tau) \geq c \, \| \tau \|_S^2 \qquad \forall \tau \in S . \tag{19}$$

Sia $i = \inf\limits_{\tau \in \Gamma} \mathscr{F}(\tau)$ e sia $\{\tau^k\}$ una successione in Γ tale che $i \leq \mathscr{F}(\tau^k) \leq i + \frac{1}{k}$.

La successione $\{\tau^k\}$ è di Cauchy. Infatti, avendo presente che Γ è *convesso* [e che quindi $\tau^h, \tau^k \in \Gamma \Rightarrow \frac{1}{2}(\tau^h + \tau^k) \in \Gamma$], possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} \mathscr{F}(\tau^h - \tau^k) = \mathscr{F}(\tau^h) + \mathscr{F}(\tau^k) - \frac{1}{2} \mathscr{F}(\tau^h + \tau^k) =$$

$$= \mathscr{F}(\tau^h) + \mathscr{F}(\tau^k) - 2 \mathscr{F}\left(\frac{\tau^h + \tau^k}{2}\right) \leq \left(i + \frac{1}{h}\right) + \left(i + \frac{1}{k}\right) - 2i = \frac{1}{h} + \frac{1}{k} ;$$

perciò, sussistendo (19), si ha:

$$\| \tau^h - \tau^k \|_S^2 \leq \frac{1}{2c} \mathscr{F}(\tau^h - \tau^k) \leq \frac{1}{c}\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{k}\right),$$

da cui si vede che $\{\tau^k\}$ è di Cauchy.

Di conseguenza, essendo Γ *chiuso* [e quindi completo] in S, $\{\tau^k\}$ converge a un elemento $\sigma \in \Gamma$.

Allora, per la continuità di $\mathscr{F}$ in S, si ha

$$\mathscr{F}(\sigma) = \lim_{k \to \infty} \mathscr{F}(\tau^k) = i .$$

Dunque σ rende minimo $\mathscr{F}$ in Γ.

Osservazione 2. Si può verificare che la condizione (19) sulle funzioni a_{ijhk} implica la limitatezza quasi ovunque delle funzioni b_{ijhk} considerate nell'Osservazione 1 (della Nota I).

Non è escluso, però, che $\mathscr{F}$ abbia minimo in Γ anche in casi (di interesse fisico) in cui le b_{ijhk} non sono limitate (quasi ovunque) in Ω.

(3) La condizione (19) è senz'altro vera se, ad esempio, le funzioni a_{ijhk} sono continue in $\overline{\Omega}$ e se, fissato comunque $x \in \overline{\Omega}$, risulta $a_{ijhk}(x) \gamma_{ij} \gamma_{hk} > 0$ per ogni matrice simmetrica $\gamma = (\gamma_{rs}) \neq 0$ di ordine n su $\mathbf{R}$: in tali ipotesi esiste infatti una costante $c > 0$ tale che $a_{ijhk}(x) \gamma_{ij} \gamma_{hk} \geq c \gamma_{ij} \gamma_{ij}$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e per ogni γ. Cfr. T. Valent, lavoro citato in (1) nella Nota I, p. 162.

Dai Teoremi I, II e III si deduce che: *se* $f \in L^2_{\mathbf{R}^n}(\Omega)$, $g \in L^2_{\mathbf{R}^n}(\partial\Omega - \Sigma)$ *soddisfano a* (3), *ove l'uguaglianza si abbia se e solo se* $r \in \mathcal{R}^*$ *e le funzioni* a_{ijhk} *misurabili e quasi ovunque limitate in* Ω *soddisfano alla condizione espressa da* (19), *esiste ed è unico l'elemento* $\sigma \in S$ *tale che* $(\sigma, \varepsilon(v)) + F(v) \leq 0$ $\forall v \in V$ *e tale che esiste* $u \in V$ *per cui* $\varepsilon_{ij}(u) = - a_{ijhk}\,\sigma_{hk}$, $(\sigma, \varepsilon(u)) + F(u) = 0$.

Ne segue che *u è individuato a meno dell'addizione di un vettore* $r \in \mathcal{R}$ *tale che* $u + r \in V$ *e che* $F(r) = 0$.

Tornando al caso $n = 3$ e al problema elastostatico da cui siamo partiti, ciò può essere espresso dicendo che – se le funzioni assegnate f, g, a_{ijhk} soddisfano alle ipotesi anzidette – esiste ed è unico lo *stress reale*, nel senso debole precisato in 2.

6. LEGAME TRA IL PROBLEMA VARIAZIONALE NELLO STRESS E QUELLO NELLO SPOSTAMENTO

Siano

$$\sigma_{ij} = - b_{ijhk}\,\varepsilon_{hk}(u) \tag{20}$$

le equazioni dedotte, quasi ovunque in Ω, dalle (5).

In questo numero facciamo l'ipotesi che *le funzioni* b_{ijhk} *siano* (al pari delle a_{ijhk}) *limitate quasi ovunque in* Ω.

Allora ha senso porre, *per ogni* $u, v \in H$,

$$b(u, v) = \int_\Omega b_{ijhk}\,\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{hk}(v)\,dx$$

e, di conseguenza, considerare il funzionale reale $\mathcal{J}$ definito in H da

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\,b(v, v) - F(v).$$

Con riferimento al problema elastostatico, [cfr. 2], $\mathcal{J}(v)$ rappresenta l'energia potenziale relativa allo spostamento v.

Si verifica [4] facilmente che $u \in V$ *rende minimo* $\mathcal{J}$ *in* V *se e solo se*

$$b(u, v) - F(v) \geq 0 \qquad \forall v \in V \tag{21}$$

$$b(u, u) - F(u) = 0. \tag{22}$$

(4) Per convincersene si osservi anzitutto che $u \in V$ rende minimo $\mathcal{J}$ in V se e solo se $b(u, v-u) \geq F(v-u)$ $\forall v \in V$ [la verifica di ciò è del tutto analoga a quella del Lemma 2], cioè se e solo se $b(u, v) - F(v) \geq b(u, u) - F(u)$ $\forall v \in v$. Quindi si consideri quanto segue.

Se $u \in V$ è soluzione delle (21), (22) risulta $b(u, v) - F(v) \geq b(u, u) - F(u)$ $\forall v \in V$.

Viceversa, se $u \in V$ è tale che $b(u, v) - F(v) \geq b(u, u) - F(u)$ $\forall v \in V$, risulta (ponendo in quest'ultima $v = 0$ e poi $v = 2u$) $b(u, u) - F(u) \leq 0$ e $b(u, u) - F(u) \geq 0$; se ne deduce (22) e, di conseguenza (21).

Una verifica di questo fatto si trova in G. FICHERA, Memoria citata in (5) della Nota I, p. 120.

Facciamo vedere che

IV. *Se* $\sigma \in \Gamma$ *rende minimo* $\mathcal{F}$ *in* Γ, *ogni* $u \in \mathrm{V}$ *tale* [5] *che* $\varepsilon_{ij}(u) = -a_{ijhk}\sigma_{hk}$, $(\sigma, \varepsilon(u)) + \mathrm{F}(u) = 0$ *rende minimo* $\mathcal{I}$ *in* V;

viceversa, se $u \in \mathrm{V}$ *rende minimo* $\mathcal{I}$ *in* V, *l'elemento* σ *legato a* u *da* (20) *appartiene a* Γ *e rende minimo* $\mathcal{F}$ *in* Γ.

Siano $\sigma \in \Gamma$ e $u \in \mathrm{V}$ tali che $\varepsilon_{ij}(u) = -a_{ijhk}\sigma_{hk}$, $(\sigma, \varepsilon(u)) + \mathrm{F}(u) = 0$.

Poichè $\sigma_{hk} = -b_{ijhk}\varepsilon_{ij}(u)$, l'essere $\sigma \in \Gamma$ equivale al sussistere della (21) $\forall v \in \mathrm{V}$, e la $(\sigma, \varepsilon(u)) + \mathrm{F}(u) = 0$ coincide con la (22); dunque u rende minimo $\mathcal{I}$ in V.

Viceversa, se u rende minimo $\mathcal{I}$ in V, u rende vere (21), (22); posto $\sigma_{hk} = -b_{ijhk}\varepsilon_{ij}(u)$, (21) implica $(\sigma, \varepsilon(v)) + \mathrm{F}(v) \leq 0\ \forall v \in \mathrm{V}$, cioè $\sigma \in \Gamma$ e (22) implica $(\sigma, \varepsilon(u)) + \mathrm{F}(u) = 0$. In base alla necessarietà della condizione espressa nel Teorema II, si può concludere che σ rende minimo $\mathcal{F}$ in Γ.

Osservazione 3. Dai Teoremi I, III e IV segue che, *sussistendo le ipotesi fatte sulle funzioni* f, g, *se le funzioni* a_{ijhk} *soddisfano a* (19) *il funzionale* $\mathcal{I}$ *ha minimo in* V.

Infatti: Γ non è vuoto [per il Teorema I], $\mathcal{F}$ ha minimo in Γ [per il Teorema III] e quindi [in base alla prima parte del Teorema IV] $\mathcal{I}$ ha minimo in V.

È essenziale ricordare che *l'esistenza del minimo per* $\mathcal{I}$ *in* V, nelle ipotesi dette, *è stata dimostrata da G. Fichera* [6] per via diretta (cioè senza passare attraverso lo studio del funzionale $\mathcal{F}$).

Si può osservare che, sapendo che $\mathcal{I}$ ha minimo in V, in virtù della seconda parte del Teorema IV si deduce che $\mathcal{F}$ ha minimo in Γ e che, se $\sigma \in \Gamma$ è l'elemento minimizzante $\mathcal{F}$ in Γ, esiste $u \in \mathrm{V}$ tale da aversi $\varepsilon_{ij}(u) = -a_{ijhk}\sigma_{hk}$, $(\sigma, \varepsilon(u)) + \mathrm{F}(u) = 0$.

Si noti però che, mentre la dimostrazione dell'esistenza del minimo per $\mathcal{I}$ in V presuppone vera (19) per ogni τ tale che $\tau_{ij} = -b_{ijhk}\varepsilon_{hk}(v)$, $v \in \mathrm{H}$, la dimostrazione che abbiamo dato in questa Nota [7] della suddetta notevole proprietà dell'elemento minimizzante $\mathcal{F}$ in Γ non presuppone la (19) e nemmeno la limitatezza delle funzioni b_{ijhk}.

Questa considerazione può essere importante in vista dell'interpretazione meccanica del Teorema II. [Vedi Osservazione 1 nella Nota I].

(5) L'esistenza di un tale u è assicurata dal Teorema II.

(6) Cfr. G. FICHERA, Memoria citata in (5) della Nota I e G. FICHERA, *Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints*, «Handbuch der Physik», Bd. VIa/2, Springer–Verlag (1972). Si veda anche J. L. LIONS e G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, «Comm. Pure Appl. Math.», *20* (1967).

(7) V. Teorema II.