Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Annalisa Marcja, Sauro Tulipani

Questioni di teoria dei modelli per linguaggi universali positivi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.6, p. 915–923.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_915_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Logica matematica. — *Questioni di teoria dei modelli per linguaggi universali positivi* (*). Nota I di ANNALISA MARCJA e SAURO TULIPANI (**), presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper some model theoretical notions for universal positive languages are investigated. In §1 and §2 we shall study the lattice of formulas, maximal and prime theories, and correlations between them. In § 3, § 4 we shall define some kind of morphisms and we shall characterize theories with quantifier elimination.

1. NOTAZIONI E PRELIMINARI

Sia L un linguaggio i cui simboli logici sono soltanto $\wedge$, $\vee$, $=$, $\forall$ e una infinità numerabile di variabili $v_0, v_1, \cdots, v_n, \cdots$ e i cui simboli extralogici sono associati a un tipo τ di strutture algebriche.

Definiamo, per induzione, l'insieme F delle formule ben formate, nel solito modo; indichiamo inoltre con F_n ($n \geq 0$) l'insieme delle formule di F le cui variabili libere sono fra le $v_0, \cdots, v_{n-1}$. Se $\mathscr{A}$ è un'algebra di tipo τ, $\alpha \in F_n$ e $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in A^n$, definiamo nel modo usuale $\mathscr{A} \models [a_0, \cdots, a_{n-1}]$. Se $T \subset F_0$ è altresì ovvio il significato di $T \models \alpha$ ($\alpha \in F_0$).

Indichiamo

$$Cn(T) = \{\alpha \in F_0 : T \models \alpha\}.$$

Diciamo che T è non contraddittorio (n.c.) se $Cn(T) \neq F_0$.

Osservazione 1. T è n.c. se e solo se $T \not\models \forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1)$.

Notiamo che per L valgono ancora i teoremi di esistenza e compattezza nella seguente forma:

TEOREMA 1.1 (fondamentale di esistenza). T *è n.c. se e solo se ammette un modello di cardinale* > 1 (= non degenere).

TEOREMA 1.2 (di compattezza). T *ha un modello non degenere se e solo se ogni sottoinsieme finito di* T *ha un modello non degenere.*

Di questi teoremi tralasciamo la semplice dimostrazione, conseguenza del fatto che L è un sottolinguaggio del linguaggio $\mathscr{L}$ con tutti i connettivi usuali (1).

(*) Lavoro eseguito nell' ambito dell'attività dei gruppi di ricerca per la Matematica del C.N.R. (G.N.S.A.G.A.)

(**) Nella seduta del 29 giugno 1974.

(1) I Teoremi 1.1 e 1.2 varrebbero ancora se, invece di soli simboli funzionali, L avesse un numero finito di simboli predicativi P_i^k $i = 0, \cdots, n$. In questo caso $T \subset F_0$ risulta non contraddittorio se e soltanto se

$$T \not\models \forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} (\forall v_0 \cdots \forall v_k P_i^k (v_0 \cdots v_k)).$$

Se L avesse una infinità di simboli predicativi il teorema 1.1 non varrebbe più.

Chiamiamo *teoria* un qualunque $T \subset F_0$, non contraddittorio.

Diciamo che una teoria T è *massimale* se non esiste alcuna teoria che la contenga propriamente. ($T_1 \subset T_2$ significa che $Cn\, T_1 \subset Cn\, T_2$).

Una teoria si dice *prima* se da $T \models \alpha \vee \beta$ segue che $T \models \alpha$ oppure $T \models \beta$.

LEMMA 1.3. *Ogni teoria massimale è prima.*

La dimostrazione è immediata dalla definizione.

Osservazione 2. Se $\mathscr{A}$ è un'algebra di tipo τ, non degenere $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \{\alpha \in F_0 : \mathscr{A} \models \alpha\}$ è prima.

Osservazione 3. Esistono teorie prime non massimali: sia $\mathscr{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ un gruppo non abeliano, avente come quoziente un gruppo $\mathscr{G}_1 = \langle G_1, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ abeliano non degenere.

$\mathscr{T}(\mathscr{G}_1) \supset \mathscr{T}(\mathscr{G})$, ma $\mathscr{T}(\mathscr{G}_1) \neq \mathscr{T}(\mathscr{G})$: infatti l'enunciato $\sigma = \forall v_0 \forall v_1 (v_0 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_0)$ è tale che $\sigma \in \mathscr{T}(\mathscr{G}_1)$ ma $\sigma \notin \mathscr{T}(\mathscr{G})$.

Ovviamente esistono teorie non prime; un esempio interessante è il seguente: sia L il linguaggio con simboli $+, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1$ e sia T la teoria i cui assiomi sono dati dagli assiomi (equazionali) di anello commutativo e da $0^{-1} = 0 \wedge \forall v\, (v \cdot v^{-1} = 1 \vee v = 0)$.

Un modello di T è un campo, oppure è l'algebra degenere.

T non è prima perché, se p è un numero primo l'enunciato $p = 0 \vee pp^{-1} = 1$ (p abbreviazione per $1 + 1 \cdots + 1$ p volte) è tale che $T \models p = 0 \vee pp^{-1} = 1$ ma $T \not\models p = 0$ nè $T \not\models pp^{-1} = 1$.

Se T_1 e T_2 sono teorie prime tali che $T_1 \nsubseteq T_2$ e $T_2 \nsubseteq T_1$ allora $T_1 \cap T_2$ non è prima (per esempio siano $T_1 = \mathscr{T}(\mathscr{C}_1)$, $T_2 = \mathscr{T}(\mathscr{C}_2)$ con $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ campi di caratteristica diversa).

2. RETICOLO DI LINDENBAUM–TARSKI

Analogamente al caso classico, possiamo associare ad ogni F_n e ad ogni $T \subset F_0$ un reticolo distributivo $\mathscr{D}_n(T)$ nel seguente modo: se $\alpha, \beta \in F_n$ poniamo $\alpha \sim_T \beta$ se e solo se per ogni $\mathscr{A} \models T$ e ogni $\langle a_0, \cdots, a_{n-1}\rangle \in A^n$.

$\mathscr{A} \models \alpha[a_0, \cdots, a_{n-1}]$ se e solo se $\mathscr{A} \models \beta[a_0, \cdots, a_{n-1}]$. $\sim_T$ è una relazione di equivalenza; poniamo $D_n(T) = F_n/\sim_T$.

Le operazioni di $\mathscr{D}_n(T)$ sono così definite:

$$
\begin{aligned}
&[\alpha] \vee [\beta] = [\alpha \vee \beta] \\
&[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] \\
&0 = [\forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1)] \\
&1 = [\forall v_0 (v_0 = v_0)]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(è routine mostrare che le (1) costituiscono una effettiva definizione).

Sia

$$\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \bigcup_{n \in w} \mathscr{D}_n(\mathrm{T}) \quad \text{e} \quad \mathscr{D}_n = \mathscr{D}_n(\varnothing).$$

Osservazione 4. Indichiamo con $\mathscr{F}_n$ l'insieme delle formule di $\mathscr{L}$ (linguaggio con tutti i connettivi) le cui variabili libere sono fra le $v_0 \cdots v_{n-1}$ e con $\mathrm{B}_n(\mathrm{T})$ il quoziente di $\mathscr{F}_n$ rispetto alla usuale relazione di equivalenza di Lindenbaum–Tarski. $\mathrm{D}_n(\mathrm{T}) \subset \mathrm{B}_n(\mathrm{T})$ per ogni n e ogni T e l'inclusione $i : \mathscr{D}_n(\mathrm{T}) \rightarrow \mathscr{B}_n(\mathrm{T})$ è un omomorfismo reticolare che preserva 1, ma non 0.

Se T è una teoria, allora $\mathrm{G_T} = \{[\alpha] : \alpha \in Cn(\mathrm{T})\}$ è un filtro proprio di $\mathscr{D}_0$. Viceversa se G è un filtro proprio di $\mathscr{D}_0$, $\mathrm{T_G} = \{a : [\alpha] \in \mathrm{G}\}$ è una teoria. Chiaramente se T è prima, il filtro associato $\mathrm{G_T}$ è primo e viceversa, e se T è massimale, il filtro associato è massimale e viceversa (cfr. [4]).

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia* $\Gamma \subset \mathscr{F}_0$ *una teoria massimale avente modelli di cardinale maggiore di* 1. $\mathrm{T} = \Gamma \cap \mathrm{F}_0$ *è una teoria prima.*

Dimostrazione. Se $\mathscr{A} \models \Gamma$ ($|\mathscr{A}| > 1$) allora $\mathrm{T} = \mathscr{T}(\mathscr{A})$ (cfr. Osservazione 2).

La Proposizione 2.1 si può invertire nel senso che vale il seguente

TEOREMA 2.2. *Per ogni teoria prima* T *tale che* $\mathrm{T} = Cn(\mathrm{T})$, *esiste un modello* $\mathscr{A}$ *per cui* $\mathrm{T} = \mathscr{T}(\mathscr{A})$ *o equivalentemente, esiste* $\Gamma \subset \mathscr{F}_0$ *massimale tale che* $\mathrm{T} = \Gamma \cap \mathrm{F}_0$.

La dimostrazione segue dal Teorema 1.2 di E. R. Fisher–A. Robinson [2]. «Se $\mathscr{R}_1 = \langle \mathrm{R}_1, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ è un sottoreticolo del reticolo distributivo $\mathscr{R}_2 = \langle \mathrm{R}_2, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ e G_1 è un filtro primo di $\mathscr{R}_1$ allora esiste un filtro primo G_2 di $\mathscr{R}_2$ tale che $\mathrm{G}_2 \cap \mathrm{R}_1 = \mathrm{G}_1$».

Questo teorema si può dimostrare ancora se l'inclusione di $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ non porta necessariamente lo 0 nello 0. L'asserto di 2.2 segue allora facilmente prendendo, come $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{D}_0$ e come $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{B}_0$ ($\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_0(\varnothing)$), tenendo conto che i filtri primi di $\mathscr{B}_0$ sono anche massimali.

3. L–MORFISMI

Siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ algebre dello stesso tipo τ e sia $h : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ un omomorfismo:

PROPOSIZIONE 3.1. *Sono equivalenti*:

(i) $\mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a\rangle_{a \in \mathrm{A}}) \subseteq \mathscr{T}(\langle \mathscr{B}, ha\rangle_{a \in \mathrm{A}})$

(ii) *per ogni* $\alpha \in \mathrm{F}_n$ *e ogni* $\langle a_0, \cdots, a_{n-1}\rangle \in \mathrm{A}^n$ *se* $\mathscr{A} \models \alpha[a_0 \cdots a_{n-1}]$ *allora* $\mathscr{B} \models \alpha[ha_0, \cdots ha_{n-1}]$.

DEFINIZIONE 3.2. Diciamo che un omomorfismo $h : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ è un L–omomorfismo se e solo se vale (i) o equivalentemente (ii).

PROPOSIZIONE 3.3. *Sono equivalenti*

(1) $$\mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A}) = \mathcal{T}(\langle \mathcal{B}, ha\rangle_{a\in A})$$

(2) *per ogni* $\alpha \in F_n$ *e ogni* $\langle a_0, \cdots, a_{n-1}\rangle \in A^n$

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_0 \cdots a_{n-1}] \text{ se e solo se } \mathcal{B} \models \alpha[ha_0, \cdots ha_{n-1}]$$

(3) *h è un monomorfismo ed un* L–*omomorfismo.*

DEFINIZIONE 3.4. Diciamo che un omomorfismo $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è una L–*immersione* (L–*monomorfismo*) se e solo se vale (1), (2) oppure (3).

Notiamo che ogni epimorfismo è un L–omomorfismo e ogni immersione elementare (cfr. [1], per gli usuali concetti di teoria dei modelli) è una L–immensione. Nel caso in cui h è l'inclusione e soddisfa (1), diciamo che $\mathcal{B}$ è L–estensione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ è L–sottoalgebra di $\mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE 3.5. *Se* $\mathcal{B} \models \mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A})$ *allora esiste un* L–*omomorfismo* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

La dimostrazione delle Proposizioni 3.1, 3.3 e 3.5 è ovvia.

PROPOSIZIONE 3.6. *Se* $\mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A})$ *è massimale allora* $\mathcal{A}$ *è semplice.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A})$ massimale e f un epimorfismo da $\mathcal{A}$ su $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ non degenere).

$\langle \mathcal{B}, fa\rangle_{a\in A} \models \mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A})$. Se c_1, c_2 sono costanti di L_A, (linguaggio esteso con « nomi » degli elementi di A), è $\langle \mathcal{B}, fa\rangle_{a\in A} \models c_1 = c_2$ se $fa_1 = fa_2$ e quindi, per la massimalità di $\mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A})$ è $\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A} \models c_1 = c_2$. Cioè f è un isomorfismo.

La Proposizione 3.6 è invertibile se ogni $\mathcal{B}$ non degenere, $\mathcal{B} \models \mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A})$, non ha per sottoalgebra l'algebra degenere.

Da questa osservazione segue che se $\mathcal{A}$ è un campo allora $\mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a\rangle_{a\in A})$ è massimale.

Osservazione 5. La composizione di un epimorfismo e di una L–immersione è ovviamente un L–omomorfismo.

Viceversa un L–omomorfismo non sempre è la composizione di un epimorfismo e di una L–immersione, come prova il seguente controesempio: sia $\mathcal{A} = \langle Q, +, -, \cdot, 0\rangle$ (Q insieme dei razionali, $+, \cdot, -$ le usuali operazioni) e $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'omomorfismo la cui immagine è $\{0\}$. f è un L–omomorfismo, ma $i : \{0\} \to \mathcal{A}$ non è chiaramente una L–immersione.

Diamo ora degli esempi relativi ad L–morfismi.

Esempio 1. Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ domini di integrità infiniti. Un qualunque monomorfismo $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è una L–immersione (questo fatto si dimostra per induzione sulla costruzione della formula, tenendo conto che possiamo limitarci a formule del tipo $\forall v_1 \cdots \forall v_n (p_1 = 0 \vee \cdots \vee p_r = 0)$ con $p_1 \cdots p_r$ termini del linguaggio).

Non tutte le L–immersioni risultano elementari: per esempio $i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ ($\mathbf{Z}$ anello degli interi, Q anello dei razionali) è una L–immersione per l'esempio, ma non è elementare.

Poniamo $\mathscr{A} \sqsubset \mathscr{B}$ se $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B})$. Se $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{T}(\mathscr{B})$ diciamo che $\mathscr{A}$ è L–equivalente a $\mathscr{B}$ (in simboli $\mathscr{A} \sqcap$ B). (Notiamo che se $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ è un L–omomorfismo allora $\mathscr{A} \sqsubset \mathscr{B}$. Se h è una immersione, allora $\mathscr{B} \sqsubset \mathscr{A}$. Se h è una L–immersione allora $\mathscr{A} \sqcap \mathscr{B}$).

Esempio 2. Sia $N = \{0, 1, \cdots\}$ $\mathscr{N} = \langle N, \cap \rangle$ $(n_1 \cap n_2 = \min(n_1, n_2))$ $N_1 = \{1, 2, \cdots\}$ $\mathscr{N}_1 = \langle N_1, \cap \rangle$ e sia $h : \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}$ l'inclusione: h è un monomorfismo, ma non è un L–omomorfismo. Infatti la formula $\alpha(v) = \forall w\,(v \cap w = v)$ è tale che $\mathscr{N}_1 \models \alpha[1]$ ma $\mathscr{N} \not\models \alpha[h(1)]$. Purtuttavia $\mathscr{N}_1 \sqcap \mathscr{N}$ perché $\mathscr{N}_1 \simeq \mathscr{N}$.

Esempio 3. Sia $\mathscr{A}$ un campo finito e sia $\mathscr{B}$ una sua estensione propria. Esiste un polinomio monico $p(x)$ a coefficienti in $\mathscr{A}$ che è nullo per ogni elemento di A, ma non nullo per ogni elemento di B. Allora non $\mathscr{A} \sqsubset \mathscr{B}$ in quanto la formula $\forall x\,(p(x) = 0)$ è soddisfatta in $\mathscr{A}$, ma non in $\mathscr{B}$. Da ciò segue che $\mathscr{B}$ non è una L–estensione di $\mathscr{A}$.

Ovviamente vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3.7. *Una teoria* T *è massimale se e solo se per ogni* $\mathscr{A}, \mathscr{B} \models$ T *non degeneri è* $\mathscr{A} \sqcap \mathscr{B}$.

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra, $A_0 \subset A$ e sia L_{A_0} il linguaggio esteso con costanti per gli elementi di A_0. Poniamo $\Delta(A_0, A) = \{\sigma \in L_{A_0} : \sigma$ enunciato atomico e $\langle \mathscr{A}, a \rangle_{a \in A} \models \sigma\}$.

$$(\Delta(A) = \Delta(A, \mathscr{A})) .$$

DEFINIZIONE 3.8 (cfr. H. J. Keisler [3]). Una funzione parziale $f : A \to B$ suriettiva è detta una « riduzione » di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$ se il dominio A_0 di f contiene tutte le costanti e se $\sigma(a_0, \cdots a_{n-1}) \in \Delta(A_0, \mathscr{A})$ allora

$$\sigma(fa_0, \cdots fa_{n-1}) \in \Delta(f[A_0], \mathscr{B}) = \Delta(\mathscr{B}) .$$

($\mathscr{B}$ si dice *riduzione di* $\mathscr{A}$ se esiste una riduzione di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$). Notiamo che se f è una riduzione di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$, allora $\mathscr{B}$ è immagine omomorfa della sotto-algebra di $\mathscr{A}$ generata dal dominio di f.

Possiamo riformulare il Teorema 2 di Keisler [3] nel seguente modo:

TEOREMA 3.9. *Se* $\mathscr{A} \sqsubset \mathscr{B}$, *allora* $\mathscr{B}$ *è riduzione di un'ultrapotenza di* $\mathscr{A}$.

Tenendo conto del Teorema 2.2 otteniamo i seguenti corollari.

COROLLARIO 3.10. T (T = Cn T) *è una teoria prima se e solo se per ogni* $\mathscr{B} \models$ T *esiste un'algebra* $\mathscr{A}$ *tale che* $\mathscr{T}(\mathscr{A}) =$ T *e* $\mathscr{B}$ *è una riduzione di* $\mathscr{A}$.

COROLLARIO 3.11. T *prima è massimale se e solo se per ogni* $\mathscr{A}$ *tale che* T $= \mathscr{T}(\mathscr{A})$ *e ogni* $\mathscr{B}$ *riduzione di* $\mathscr{A}$, *segue che* $\mathscr{A} \sqcap \mathscr{B}$.

Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono due algebre isomorfe ($\mathscr{A} \simeq \mathscr{B}$) allora evidentemente $\mathscr{A} \sqcap \mathscr{B}$.

Il viceversa non è sempre vero, ma vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3.12. *Se* $\mathscr{A}$ *è finita e* $\mathscr{A} \square \mathscr{B}$, *allora* $\mathscr{A} \simeq \mathscr{B}$.

Dimostrazione. $\mathscr{A} \square \mathscr{B}$ quindi (Teorema 3.9) $\mathscr{B}$ è una riduzione di un'ultrapotenza di $\mathscr{A}$. Poiché $\mathscr{A}$ è finito, $\mathscr{B}$ è una riduzione di $\mathscr{A}$, a meno di isomorfismi, e quindi $|\mathscr{A}| \geq |\mathscr{B}|$. Simmetricamente $|\mathscr{B}| \geq |\mathscr{A}|$.

Da qui segue che la riduzione di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$ è un isomorfismo.

Osservazione 6. I teoremi di Löwenheim–Skolem, e altri teoremi di cui faremo menzione, valgono anche per il linguaggio L, essendo L sottolinguaggio di $\mathscr{L}$.

4. ELIMINAZIONE DEI QUANTIFICATORI

Sia T una teoria, diciamo che due formule β, γ sono T–equivalenti se $[\beta] = [\gamma]$ nel reticolo $\mathscr{D}(T)$.

Una teoria T ammette l'eliminazione dei quantificatori (in simboli T è Q.E.) se ogni formula β di L è T–equivalente a una formula α aperta.

TEOREMA 4.1. *Sono equivalenti*:

(i) T *è* Q.E.

(ii) *per ogni* $\mathscr{A} \models T$ $\quad T \cup \Delta(\mathscr{A}) = \mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a\rangle_{a\in A})$

(iii) *per ogni* $\mathscr{A}, \mathscr{B} \models T$ *ogni monomorfismo* $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *è una* L–*immersione*.

(iv) *per ogni* $\mathscr{B} \models T$ *e ogni monomorfismo* $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *esistono* $\mathscr{C}$, $h : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ (h — L–immersione) e $g : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ (immersione) *tale che il seguente diagramma commuti*

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C} & \\ \mathscr{A} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, no head] & & \mathscr{B} \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. 1) (i) $\to$ (ii).

Poiché $T \cup \Delta(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a\rangle_{a\in A})$ è sufficiente mostrare il viceversa. Sia $\mathscr{B} \models T \cup \Delta(\mathscr{A})$; esiste allora un omomorfismo $g : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

Se dimostriamo che g è un L–omomorfismo, abbiamo l'asserto dalla Proposizione 3.1.

Sia $\alpha(v_0, \cdots, v_{n-1}) \in F_n$. Per (i) possiamo supporre α priva di quantificatori. Sia $\langle a_0, \cdots, a_{n-1}\rangle \in A^n$ e supponiamo che $\mathscr{A} \models \alpha[a_0, \cdots a_{n-1}]$; poiché α è aperta segue che $\mathscr{B} \models \alpha[ga_0, \cdots, ga_{n-1}]$.

2) (ii) $\to$ (iii).

Sia $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un monomorfismo; da (ii) segue che $\mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a\rangle_{a\in A}) = T \cup \Delta(\mathscr{A})$. È allora $T \cup \Delta(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{T}(\langle \mathscr{B}, ha\rangle_{a\in A}) \subseteq \mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a\rangle_{a\in A}) = \mathscr{T} \cup \Delta(\mathscr{A})$ per cui $\mathscr{T}(\langle \mathscr{B}, ha\rangle_{a\in A}) = \mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a\rangle_{a\in A})$ e h risulta un L–monomorfismo.

3) (iii) $\rightarrow$ (ii).

$T \cup \Delta(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a \rangle_{a \in A})$. È sufficiente allora dimostrare l'inclusione inversa. Sia $\mathscr{B} \models T \cup \Delta(\mathscr{A})$; esiste allora un omomorfismo $g : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$. Ma $g[\mathscr{A}]$ è una L–sottoalgebra di B per (iii) e quindi $\mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a \rangle_{a \in A}) \subseteq \mathscr{T}(g[\mathscr{A}], ga_{a \in A}) \subseteq \mathscr{T}(\langle \mathscr{B}, ga \rangle_{a \in A})$ e quindi $\mathscr{B} \models \mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a \rangle_{a \in A})$.

4) (iii) $\rightarrow$ (iv) banale.

5) (iv) $\rightarrow$ (iii).

Sia $\alpha \in F_n$ e $\langle a_0, \cdots, a_{n-1} \rangle \in A^n$; poiché h è un L monomorfismo si ha: $\mathscr{A} \models \alpha[a_1 \cdots a_n]$ se e solo se $\mathscr{C} \models \alpha[gfa_1 \cdots gfa_n]$ ma g è un monomorfismo, quindi

$$\mathscr{B} \models \alpha[fa_1 \cdots fa_n].$$

6) (ii) $\rightarrow$ (i).

La dimostrazione è essenzialmente analoga alla dimostrazione del Teorema 13.1 di Sacks (cfr. [5], p. 63 «T sottostrutturalmente completa implica che T è Q.E.»).

PROPOSIZIONE 4.2. *Se* T *è* Q.E. *e ha un modello immergibile in ogni altro, allora, è massimale.*

I seguenti esempi mostrano che esistono teorie massimali e Q.E., Q.E. e non massimali, e non Q.E. e massimali.

Esempio 1. Sia T la teoria il cui linguaggio è $+, \cdot, -, \{f_q\}_{q \in Q}$, 1 e i cui assiomi sono quelli di algebra commutativa unitaria su **Q** (razionali).

Mostriamo che T è Q.E. Sono necessari alcuni lemmi:

LEMMA 4.3. *Sia* T *una teoria e sia* S *un insieme di formule, chiamate formule base. Per mostrare che ogni formula è* T *equivalente a una «combinazione reticolare» di formule in* S *è sufficiente mostrare:*

1) *ogni formula atomica è* T *equivalente a una combinazione reticolare di formule base.*

2) *Se* Θ *è una combinazione reticolare di formule base, allora* $\forall v \Theta$ *è* T–*equivalente a una combinazione reticolare di formule base.*

La dimostrazione è simile a quella del Lemma 1.5.1. (p. 50) di Chang–Keisler ([1]).

Sia $\mathscr{A} \models T$ (cioè $\mathscr{A}$ è un anello contenente come sottoanello Q) ed E un sottoinsieme dell'anello $\mathscr{A}[x]$. Indichiamo con V(E) l'insieme $\{a \in A : p(a) = 0$ per ogni $p \in E\}$.

LEMMA 4.4. *Siano* $E_1 \cdots, E_s$ *sottoinsiemi di* $\mathscr{A}[x]$ *tali che:*

$$V(E_1) \cup \cdots \cup V(E_s) \supseteq Q;$$

allora esiste almeno in i $(1 \leq i \leq s)$ *tale che i polinomi di* E_i *sono tutti identicamente nulli.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, falsa la tesi del lemma e sia p_i un polinomio non identicamente nullo di E_i $(1 \leq i \leq s)$. È allora $p_1 = = q(x) \cdot \prod_{j=1}^{k_i} (x - \alpha_{ji})^{\rho_{ji}}$ con $\alpha_{ji} \in Q$ e $q(r) \neq 0$ per ogni $r \in Q$.

Sia $r \neq \alpha_{ji}$ per ogni i, j; da questo segue che $p_i(r) \neq 0$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

PROPOSIZIONE 4.5. *La teoria* T *è* Q.E.

Dimostrazione. Per formule base prendiamo le formule atomiche del tipo $p(v_0, \cdots, v_n) = 0$. Usiamo il Lemma 4.3: chiaramente ogni formula atomica è T equivalente a una del tipo $p(v_0, \cdots, v_n) = 0$.

Sia $\mathcal{O}$ una combinazione reticolare di formula base, allora $\mathcal{O}$ è del tipo:

$$\bigvee_{i=1}^{s} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} (p_{ij}(v_0, \cdots, v_n) = 0) \right).$$

Sia

$$E_i = \{p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{ik_i}\} \qquad (1 \leq i \leq s)$$

e F_i l'insieme dei coefficienti dei polinomi in E_i, pensando tali polinomi nella sola variabile v_0; ovviamente F_i è un sottoinsieme di $\mathcal{A}[v_1, \cdots, v_n]$.

Sia α la formula

$$\bigvee_{i=1}^{s} \left(\bigwedge_{q \in F_i} q(v_1, \cdots, v_n) = 0 \right); \alpha$$

è T equivalente a

$$\forall v_0 \, \mathcal{O} .$$

Sia

$$\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in A^n \, (\mathcal{A} \models T),$$

$\mathcal{A} \models \forall v_0 \, \mathcal{O}[a_1 \cdots a_n]$ e $\overline{E}_i = \{p(v_0, a_1, \cdots, a_n) : p \in E_i\}$.

È $V(\overline{E}_1) \cup V(\overline{E}_2) \cup \cdots \cup V(\overline{E}_s) \supseteq Q$ e per il Lemma 4.4 esiste un i_0 $1 \leq i_0 \leq s$ tale che $\overline{E}_{i0}$ contiene polinomi tutti identicamente nulli, quindi $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in V(F_{i0})$; ma allora $\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \cdots, a_n]$.

Viceversa se $\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \cdots, a_n]$ esiste un i_0 $1 \leq i_0 \leq s$ tale che

$$\mathcal{A} \models \bigwedge_{q \in F_{i0}} q(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

e quindi $\overline{E}_{i0}$ è formato da polinomi tutti identicamente nulli, quindi

$$\mathcal{A} \models \forall v_0 \, \mathcal{O}[a_1, \cdots, a_n].$$

Inoltre T è massimale perché Q è un modello di T immergibile in ogni altro modello di T.

Osservazione 7. Se una teoria è tale che $T \cup \Delta(\mathcal{A})$ è massimale per ogni $\mathcal{A} \models T$, allora T è Q.E. perché $T \cup \Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{T}(\langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in A})$.

Il viceversa non è sempre vero come dimostra l'esempio precedente: infatti se $\mathcal{A} \models T$ e $\mathcal{A}$ non è semplice (esempio: Q^{ω}) allora $T \cup \Delta(\mathcal{A})$ non è massimale (cfr. Proposizione 3.6).

Esempio 2. Sia L′ il linguaggio dell'esempio precedente con la aggiunta di una nuova costante c. Sia $T' = T \cup \{c = 0 \vee c = 1\}$. Una dimostrazione analoga all'Esempio 1 si applica a T′ e mostra che T′ è Q.E. T′ non è massimale perché non è nemmeno prima in quanto $T' \models c = 0 \vee c = 1$ ma $T' \not\models c = 0$ e $T' \not\models c = 1$.

Esempio 3. Sia $\mathscr{A}$ un campo finito: $\mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a \rangle_{a \in A})$ è massimale (cfr. Osservazione alla Proposizione 3.6). Se $\mathscr{B}$ è un'estensione infinita di $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ non è una L estensione e quindi per il Teorema 4.1 $\mathscr{T}(\langle \mathscr{A}, a \rangle_{a \in A})$ non è Q.E.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. C. CHANG e H. J. KEISLER (1973) – *Model Theory*. Amsterdam.

[2] E. R. FISHER e A. ROBINSON (1972) – *Inductive theories and their forcing companions*, « Israel J. Math. », *12*, 95–107.

[3] H. J. KEISLER (1960) – *Theory of models with generalized atomic formulas*, « J. Symbolic Logic », *25*, 1–26.

[4] H. RASIOWA e R. SIKORSKI (1968) – *Mathematics of metamathematics* Warszawa.

[5] G. E. SACKS (1972) – *Saturated model theory*. Reading.

[6] A. TARSKI (1968) – *Equational logic and equational theories of algebras*, in « Contributions to mathematical logic », Amsterdam.