Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Renzo Mazzocco

Sulle estensioni di algebre di Lie

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.6, p. 907–914.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_907_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Topologia algebrica. — *Sulle estensioni di algebre di Lie.* Nota di RENZO MAZZOCCO (*), presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — A classification theorem for (R , F)-extensions of Lie algebras is proved, which generalizes a classical result of C. Chevalley and S. Eilenberg.

1. INTRODUZIONE

In relazione ad alcune ricerche concernenti l'anello caratteristico di fibrati, N. Teleman ha recentemente considerato in [4] un nuovo tipo di estensioni di algebre di Lie che, per la loro struttura (n. 2), saranno qui chiamate (R , F)-*estensioni di algebre di Lie.*

Ci limitiamo ad accennare per ora che R è un *anello commutativo con unità* ed F è una R-*algebra commutativa con unità*, cosicché $F \supset R$. Se in particolare $F = R$, si ricade nel caso classico delle estensioni di R-algebre di Lie (1), per le quali sussiste un teorema di classificazione (Theorem 26.2 di [2]).

Scopo del presente lavoro è appunto quello di generalizzare il teorema citato. Proveremo precisamente che le (R , F)-estensioni di algebre di Lie $(\mathscr{E}) = 0 \to H \to P \to T \to 0$, con nucleo H abeliano, considerate a meno di equivalenza, corrispondono biunivocamente agli elementi di un opportuno gruppo di coomologia di T a valori in H : $\mathscr{H}^2_F(T , H)$ (n. 3).

2. (R , F)-ESTENSIONI DI ALGEBRE DI LIE

2.1. Essendo R , F rispettivamente un anello e una R-algebra come già precisato (n. 1), siano H , T , P F-*moduli* e, relativamente ad R, R-*algebre di Lie.*

Consideriamo la successione esatta

$$(2.1.1) \qquad (\mathscr{E}) = 0 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0.$$

dove ι , π sono *omomorfismi di* R-*algebre di Lie* e inoltre F-*omomorfismi.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 29 giugno 1974.

(1) Cfr. N. BOURBAKI [1], § 1, n. 7, C. CHEVALLEY and S. EILENBERG [2], n. 26, oppure Séminaire «Sophus Lie» [3], Exposé n. 5.

Ebbene diremo che la *successione esatta* ($\mathscr{E}$) *è una* (R , F)*–estensione della* R*–algebra di Lie* T *con nucleo* H *se sono soddisfatte le seguenti condizioni*:

(2.1.2) $$\mathrm{F} \text{ è un } \mathrm{T}\text{–modulo};$$

(2.1.3) $$[fp_1 , p_2] = f[p_1 , p_2] - (\pi(p_2)f)\, p_1 \quad , \quad \forall f \in \mathrm{F} \ \ e \ \ \forall p_1 , p_2 \in \mathrm{P};$$

(2.1.4) *esiste un* F*–omomorfismo* $\nabla : \mathrm{T} \to \mathrm{P}$ *tale che* $\pi\nabla = 1_{\mathrm{T}}$.

2.2. Sono opportune le seguenti osservazioni:

a) Ponendo

(2.2.1) $$pf = \pi(p)f \quad , \quad \forall p \in \mathrm{P} \ \ \mathrm{e} \ \ \forall f \in \mathrm{F},$$

si ha che, essendo F un T–modulo, F è un P*–modulo*.

b) L'esistenza dell'F–omomorfismo ∇ di (2.1.4) comporta che la successione esatta (2.1.1) *sia spezzata come successione di* F*–moduli*; ∇ pertanto sarà chiamato uno *splitting* della (R , F)–estensione di algebre di Lie.

c) Identificando H con $\iota(\mathrm{H}) \subset \mathrm{P}$ si ha che H è un *ideale* in P, e quindi un P*–modulo* definendo:

(2.2.2) $$ph = [p , h] \quad , \quad \forall p \in \mathrm{P} \ \ \mathrm{e} \ \ \forall h \in \mathrm{H}.$$

d) Dalla anticommutatività del prodotto crochet in P e dalla (2.1.3) si trae:

(2.2.3) $$[p_1 , fp_2] = f[p_1 , p_2] + (\pi(p_1)f)\, p_2 \quad , \quad \forall f \in \mathrm{F} \ \ \mathrm{e} \ \ \forall p_1 , p_2 \in \mathrm{P}.$$

e) Dalla (2.1.3) segue, essendo π F–omomorfismo e omomorfismo di R–algebre di Lie:

(2.2.4) $$[ft_1 , t_2] = f[t_1 , t_2] - (t_2 f)\, t_1 \quad , \quad \forall f \in \mathrm{F} \ \ \mathrm{e} \ \ \forall t_1 , t_2 \in \mathrm{T}.$$

Infatti si ha

$$[f\nabla(t_1) , \nabla(t_2)] = f[\nabla(t_1) , \nabla(t_2)] - (\pi(\nabla(t_2))f)\, \nabla(t_1),$$

donde la conclusione applicando π ad entrambi i membri

Dalla anticommutatività del prodotto crochet segue poi in modo immediato:

(2.2.5) $$[t_1 , ft_2] = f[t_1 , t_2] + (t_1 f)\, t_2 \quad , \quad \forall f \in \mathrm{F} \ \ \mathrm{e} \ \ \forall t_1 , t_2 \in \mathrm{T}.$$

f) Discende dalla (2.1.3) anche che, essendo $\pi(h) = 0$:

(2.2.6) $$[fp , h] = f[p , h] \quad , \quad \forall f \in \mathrm{F} \quad , \quad \forall p \in \mathrm{P} \ \ \mathrm{e} \ \ \forall h \in \mathrm{H}.$$

g) Essendo P una R–algebra di Lie, se $f \in \mathrm{R}$, la (2.1.3) deve dare $[fp_1 , p_2] = f[p_1 , p_2]$ e quindi deve risultare:

(2.2.7) $$(\pi(p_2)f)\, p_1 = 0 \quad , \quad \forall p_1 , p_2 \in \mathrm{P} \ \ \mathrm{e} \ \ \forall f \in \mathrm{R},$$

e, applicando π:

$$(t_2 f)\, t_1 = 0 \quad , \quad \forall t_1 , t_2 \in T \quad e \quad \forall f \in R . \tag{2.2.8}$$

h) Se $F = R$, la struttura di F–modulo su H, T e P è già ovviamente assegnata con la struttura di R–algebra di Lie, $\nabla : T \to P$ diviene un R–omomorfismo e la (2.1.3), tenuto conto di (2.2.7), non esprime altro che $[rp_1 , p_2] = r\,[p_1 , p_2]$, $\forall r \in R$ e $\forall p_1 , p_2 \in P$, ma questa è una delle condizioni richieste perché P sia una R–algebra di Lie, quindi in definitiva si ricade nelle R–estensioni di algebre di Lie. Quanto alla (2.1.2) può sempre supporsi soddisfatta assumendo $tr = 0$, $\forall t \in T$ e $\forall r \in R$.

2.3. Se $(\bar{\mathscr{E}}) \equiv 0 \longrightarrow H \xrightarrow{\bar\iota} \bar P \xrightarrow{\bar\pi} T \longrightarrow 0$ è un'altra (R , F)–estensione di algebre di Lie, $(\mathscr{E})$, $(\bar{\mathscr{E}})$ sono *equivalenti*, e scriveremo $(\mathscr{E}) \cong (\bar{\mathscr{E}})$, *se esiste un isomorfismo di* R–*algebre di Lie e* F–*isomorfismo* $\rho : P \to \bar P$ *che rende commutativo il diagramma*:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & T & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\bar\iota} & \bar P & \xrightarrow{\bar\pi} & T & \longrightarrow & 0 . \end{array} \tag{2.3.1}$$

3. (R , F)–ESTENSIONI DI ALGEBRE DI LIE CON NUCLEO ABELIANO

3.1. In vista del risultato che ci siamo prefissi di raggiungere (n. 1), è utile fare qualche ulteriore considerazione sulle (R , F)–estensioni di algebre di Lie con nucleo H *abeliano*, cioè soddisfacente alla:

$$[h_1 , h_2] = 0 \quad , \quad \forall h_1 , h_2 \in H. \tag{3.1.1}$$

In quesa ipotesi una (R , F)–estensione di algebre di Lie $(\mathscr{E})$ induce in modo naturale una struttura di T–*modulo* sopra H. Infatti poiché per ogni coppia di splittings ∇, ∇' risulta, essendo al solito $t \in T$,

$\nabla'(t) - \nabla(t) = h' \in H$, si ha, se $h \in H$, $[\nabla'(t), h] = [\nabla(t) + h', h] = [\nabla(t), h]$,

ed è quindi lecito porre:

$$th = [\nabla(t), h] \quad , \quad \forall t \in T \quad e \quad \forall h \in H . \tag{3.1.2}$$

Risulta inoltre:

$$(ft)\, h = f\,(th) , \qquad \forall f \in F \quad , \quad \forall t \in T \quad e \quad \forall h \in H; \tag{3.1.3}$$

$$t\,(fh) = f\,(th) + (tf)\, h , \quad \forall f \in F \quad , \quad \forall t \in T \quad e \quad \forall h \in H. \tag{3.1.4}$$

Infatti si ha

$$(ft)\, h = [\nabla(ft), h] = f\,[\nabla(t), h] = f\,(th)$$

e analogamente

$$t\,(fh) = [\nabla(t), fh] = f\,[\nabla(t), h] + (tf)\, h = f\,(th) + (tf)\, h .$$

3.2. Per ogni numero naturale n sia $C^n_F(T, H)$ il gruppo delle forme (F, n)–lineari alternanti definite su T^n e a valori in H.

Ricordiamo [2] che, essendo H un T–modulo (n. 3.1), *l'operatore di cobordo* $d^n_R : C^n_R(T, H) \to C^{n+1}_R(T, H)$, dove $C^n_R(T, H) \supset C^n_F(T, H)$ è il gruppo delle forme (R, n)–lineari alternanti, è definito, $\forall c^n \in C^n_R(T, H)$ e $\forall t_1, \ldots, t_{n+1} \in T$, da:

$$(3.2.1) \qquad d^n_R(c^n)(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \sum_{1 \le i \le n+1} (-1)^{i+1} t_i\, c^n(t_1, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, t_{n+1}) + \\ + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} c^n([t_i, t_j], t_1, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{n+1}).$$

Sussiste la seguente

(3.2.2) PROPOSIZIONE. $d^n_R(C^n_F(T, H)) \subset C^{n+1}_F(T, H)$.

Sia $c^n \in C^n_F(T, H)$; risulta, tenuto conto di (3.1.3), (3.1.4) e (2.2.4), che,

$$\forall f \in F \text{ e } \forall t_1, \cdots, t_{n+1} \in T,\ d^n_R(c^n)(ft_1, t_2, \cdots, t_{n+1}) = (ft_1)\, c^n(\hat{ft_1}, t_2, \cdots, t_{n+1}) + \\ + \sum_{2 \le i \le n+1} (-1)^{i+1} t_i\, c^n(ft_1, t_2, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, t_{n+1}) + \\ + \sum_{2 \le j \le n+1} (-1)^{1+j} c^n([ft_1, t_j], \hat{ft_1}, t_2, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{n+1}) + \\ + \sum_{2 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} c^n([t_i, t_j], ft_1, t_2, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{n+1}) = \\ = f(t_1 c^n(\hat{t}_1, t_2, \cdots, t_{n+1})) + \sum_{2 \le i \le n+1} (-1)^{i+1} t_i (fc^n(t_1, t_2, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, t_{n+1})) + \\ + \sum_{2 \le j \le n+1} (-1)^{1+j} c^n(f[t_1, t_j] - (t_j f)\, t_1, \hat{t}_1, t_2, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{n+1}) + \\ + \sum_{2 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} fc^n([t_i, t_j], t_1, t_2, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{n+1}) = \\ = f\Big(\sum_{1 \le i \le n+1} (-1)^{i+1} t_i\, c^n(t_1, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, t_{n+1}) + \\ + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} c^n([t_i, t_j], t_1, \cdots, \hat{t}_i, \cdots, \hat{t}_j, \cdots, t_{n+1})\Big) = \\ = f\, d^n_R(c^n)(t_1, \cdots, t_{n+1});$$

cioè

$$d^n_R(c^n) \in C^{n+1}_F(T, H).$$

In forza della (3.2.2) risulta che $\{C^n_F(T, H), d^n_R\}_{n \in N}$ è un *complesso di cocatene*. Posto *ker* $d^n_R = Z^n_F(T, H)$ e *Im* $d^{n-1}_R = B^n_F(T, H)$, il gruppo di coomologia di dimensione n $Z^n_F(T, H)/B^n_F(T, H)$ sarà indicato con $\mathscr{H}^n_F(T, H)$.

(2) Cfr. N. TELEMAN [4], p. 500.

4. CLASSIFICAZIONE DELLE (R, F)–ESTENSIONI DI ALGEBRE DI LIE CON NUCLEO ABELIANO

4.1. Sia $(\mathscr{E})$ una (R, F)–estensione di T con nucleo H abeliano e ∇ un suo splitting.

Sia $\Omega_\nabla : T^2 \to H$ l'applicazione definita da:

$$(4.1.1) \qquad \Omega_\nabla(t_1, t_2) = \nabla([t_1, t_2]) - [\nabla(t_1), \nabla(t_2)] \quad , \quad \forall t_1, t_2 \in T.$$

Seguendo [4] chiameremo Ω_∇ *curvatura basica* di $(\mathscr{E})$.

Sussiste la seguente:

(4.1.2) PROPOSIZIONE. $\Omega_\nabla : T^2 \to H$ *è una forma* (F, 2)*-lineare alternante ed* ha cobordo nullo; *cioè* $\Omega_\nabla \in Z_F^2(T, H)$.

È immediato che $\Omega_\nabla \in Z_R^2(T, H)$, quindi basta solo provare che $\Omega_\nabla(ft_1, t_2) = f\Omega_\nabla(t_1, t_2)$, $\forall f \in F$ e $\forall t_1, t_2 \in T$.

Risulta

$$\Omega_\nabla(f t_1, t_2) = \nabla([ft_1, t_2]) - [\nabla(ft_1), \nabla(t_2)] = \nabla(f[t_1, t_2] - (t_2 f) t_1) -$$

$$-f[\nabla(t_1), \nabla(t_2)] + (t_2 f)\nabla(t_1) = f(\nabla[t_1, t_2] - [\nabla(t_1), \nabla(t_2)]) = f\Omega_\nabla(t_1, t_2).$$

4.2. Abbiamo appena visto come ad ogni (R, F)–estensione di T con nucleo abeliano H sia possibile associare un (F, 2)–cociclo $\Omega_\nabla \in Z_F^2(T, H)$. Naturalmente Ω_∇ dipende dallo splitting $\nabla : T \to P$.

Si ha però:

(4.2.1.) PROPOSIZIONE. *Se* ∇ *e* ∇' *sono due splittings di una stessa* (R, F)–*–estensione di* T *con nucleo abeliano* H *allora* $\Omega_\nabla \overset{F}{\sim} \Omega_{\nabla'}$; *cioè* Ω_∇ *e* $\Omega_{\nabla'}$ *appartengono alla stessa classe di coomologia in* $\mathscr{H}_F^2(T, H)$.

Da $\pi\nabla' = \pi\nabla = 1_T$ si trae che $\pi(\nabla' - \nabla) = 0$; cioè $\nabla' - \nabla = c^1 \in C_F^1(T, H)$, essendo ∇ e ∇' F–omomorfismi.

Risulta allora

$$\Omega_{\nabla'}(t_1, t_2) = (\nabla + c^1)([t_1, t_2]) - [(\nabla + c^1)(t_1), (\nabla + c^1)(t_2)]$$

e quindi, proseguendo come in [3], p. 5–03, si trova $\Omega_\nabla \overset{F}{\sim} \Omega_{\nabla'}$.

4.3. Se ∇ e $\overline{\nabla}$ sono splittings di due (R, F)–estensioni di algebre di Lie con nucleo abeliano equivalenti: $(\mathscr{E})$ ed $(\overline{\mathscr{E}})$, allora dalla proposizione precedente, tenuto conto che $(\mathscr{E})$ ed $(\overline{\mathscr{E}})$ inducono la stessa struttura di T–modulo sopra H, si ha senz'altro:

(4.3.1) PROPOSIZIONE. $\Omega_\nabla \overset{F}{\sim} \Omega_{\overline{\nabla}}$.

4.4. Ferme restando le ipotesi fatte su R, F, H e T in n. 1 e in n. 2.1. e che la R–algebra di Lie H sia abeliana e abbia struttura di T–modulo, supponiamo soddisfatte le condizioni (2.2.4), (3.1.3) e (3.1.4) che abbiamo visto essere necessarie se esiste una (R, F)–estensione di algebre di Lie.

In queste ipotesi stabiliamo allora il:

(4.4.1) TEOREMA. *Per ogni cociclo* $\zeta^2 \in Z_F(T, H)$ *esiste una* (R, F)*–estensione di* T *con nucleo* H *che ha una curvatura basica coincidente con* ζ^2 *e che induce su* H *la struttura di* T*–modulo assegnata. Inoltre a cocicli coomologhi corrispondono* (R, F)*–estensioni di algebre di Lie equivalenti.*

Prima di dimostrare questo teorema è opportuno fare le seguenti osservazioni:

a) Con le ipotesi quì fatte si può costruire il gruppo di coomologia $\mathcal{H}_F^*(T, H)$ come in n. 3.2.

b) Poiché T è R–algebra di Lie, dalla (2.2.4), per $f \in R$, segue $(t_2 f)\, t_1 = 0$, $\forall t_1, t_2 \in T$.

Dimostrazione di (4.4.1). Sia $H \times T$ l'F–modulo prodotto cartesiano degli F–moduli H e T. È noto che [(3)], essendo $\zeta^2 \in Z_F^2(T, H) \subset Z_R^2(T, H)$, se si pone, $\forall (h_1, t_1), (h_2, t_2) \in H \times T$,

$$[(h_1, t_1), (h_2, t_2)] = (t_1 h_2 - t_2 h_1 - \zeta^2(t_1, t_2), [t_1, t_2]), \tag{4.4.2}$$

si introduce in $H \times T$ una struttura di R–algebra di Lie.

Se con $\iota : H \to H \times T$ e $\pi : H \times T \to T$ si indicano gli F–omomorfismi definiti da $\iota(h) = (h, 0)$ e $\pi(h, t) = t$ si ha che la successione

$$(\mathscr{E}) \equiv 0 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} H \times T \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0 \tag{4.4.3}$$

è ovviamente esatta. È anche ovvio, tenuto conto della definizione (4.4.2) del prodotto crochet in $H \times T$, che ι e π sono omomorfismi di R–algebre di Lie. Esiste uno splitting $\nabla : T \to H \times T$ che è un F–omomorfismo, basta infatti assumere $\nabla(t) = (0, t)$, $\forall t \in T$.

Proviamo adesso che in $H \times T$ sussiste la (2.1.3) cosicché la $(\mathscr{E})$ viene ad essere una (R, F)–estensione di T con nucleo H. Risulta

$$[f(h_1, t_1), (h_2, t_2)] = ((ft_1)\, h_2 - t_2 (fh_1) - \zeta^2(ft_1, t_2), [ft_1, t_2]).$$

Applicando (3.1.3), (3.1.4), (2.2.4) e tenuto conto che ζ^2 è (F, 2)–lineare si trova

$$\begin{aligned} [f(h_1, t_1), (h_2, t_2)] &= (f(t_1 h_2) - f(t_2 h_1) - (t_2 f)\, h_1 - \\ &- f\zeta^2(t_1, t_2), f[t_1, t_2] - (t_2 f)\, t_1) = \\ &= f[(h_1, t_1), (h_2, t_2)] - (t_2 f)(h_1, t_1) = \\ &= f[(h_1, t_1), (h_2, t_2)] - (\pi(h_2, t_2) f)(h_1, t_1), \end{aligned}$$

cioè la (2.1.3).

(3) Cfr. per esempio [3], Exposé n. 5.

In riferimento alla (3.1.2), giacché risulta in questo caso $[\nabla(t), \iota(h)] = [(0, t), (h, 0)] = (th, 0)$, si ha che la (4.4.3) induce su H la stessa struttura di T–modulo assegnata per ipotesi.

In relazione allo splitting $\nabla : T \to H \times T$ sopra definito risulta in modo immediato $\Omega_\nabla(t_1, t_2) = (\zeta^2(t_1, t_2), 0)$, $\forall t_1, t_2 \in T$ e quindi, identificando H con $\iota(H) \subset H \times T$, si ha che ζ^2 è una curvatura basica di $(\mathscr{E})$.

Siano adesso $\zeta^2, \bar{\zeta}^2 \in Z^2_F(T, H)$ due cocicli coomologhi, cioè $\bar{\zeta}^2 - \zeta^2 \in B^2_F(T, H)$ ed $(\mathscr{E}) = 0 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} H \times T \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0$, $(\bar{\mathscr{E}}) = 0 \longrightarrow H \xrightarrow{\bar{\iota}} \overline{H \times T} \xrightarrow{\bar{\pi}} T \longrightarrow 0$, le (R, F)–estensioni di algebre di Lie associate, come sopra, rispettivamente ai due cocicli. Sia $\bar{\zeta}^2 = \zeta^2 + d^1_R(c^1)$, $c^1 \in C^1_F(T, H)$. L'applicazione $\rho : H \times T \to \overline{H \times T}$ definita da:

$$\rho(h, t) = (h + c^1(t), t), \tag{4.4.4}$$

è un F–omomorfismo. Infatti si ha,

$$\forall f \in F \text{ e } \forall (h, t) \in H \times T, \ \rho(f(h, t)) = (fh + c^1(ft), ft) = (fh + fc^1(t), ft) = f\rho(h, t)$$

e

$$\begin{aligned} \rho((h_1, t_1) + (h_2, t_2)) &= \rho(h_1 + h_2, t_1 + t_2) = (h_1 + h_2 + c^1(t_1 + t_2), t_1 + t_2) = \\ &= \rho(h_1, t_1) + \rho(h_2, t_2). \end{aligned}$$

È facile osservare che ρ è biettiva.

La ρ è un isomorfismo di R–algebre di Lie. Intanto da $R \subset F$ discende che ρ è un R–isomorfismo. Risulta poi

$$\begin{aligned} \rho[(h_1, t_1), (h_2, t_2)] &= \rho(t_1 h_2 - t_2 h_1 - \zeta^2(t_1, t_2), [t_1, t_2]) = \\ &= (t_1 h_2 - t_2 h_1 - \zeta^2(t_1, t_2) + c^1([t_1, t_2]), [t_1, t_2]) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\rho(h_1, t_1), \rho(h_2, t_2)] &= [(h_1 + c^1(t_1), t_1)(h_2 + c^1(t_2), t_2)] = \\ &= (t_1 h_2 - t_2 h_1 + t_1 c^1(t_2) - t_2 c^1(t_1) - \bar{\zeta}^2(t_1, t_2), [t_1, t_2]) = \\ &= (t_1 h_2 - t_2 h_1 + t_1 c^1(t_2) - t_2 c^1(t_1) - \zeta^2(t_1, t_1) - d^1_R(c^1)(t_1, t_2), [t_1, t_2]) = \\ &= (t_1 h_2 - t_2 h_1 - \zeta^2(t_1, t_2) + c^1([t_1, t_2]), [t_1, t_2]), \end{aligned}$$

quindi ρ è un isomorfismo di R–algebre di Lie.

Infine poiché risulta $\rho(\iota(h)) = \rho(h, 0) = \bar{\iota}(h)$ e $\bar{\pi}(\rho(h, t)) = \bar{\pi}(h + c^1(t), t) = t = \pi(h, t)$ è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & H \times T \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H \arrow[r, "\bar{\iota}"] & \overline{H \times T} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e quindi $(\mathscr{E}) \cong (\bar{\mathscr{E}})$.

4.5. I risultati ottenuti in (4.3.1) e (4.4.1) possono cra riassumersi nel seguente teorema conclusivo:

(4.5.1) TEOREMA. *Le classi di equivalenza di* (R, F)*–estensioni della R–algebra di Lie* T *con nucleo abeliano* H, *inducenti una assegnata struttura di* T*–modulo sopra* H, *sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del gruppo di coomologia* $\mathcal{H}_F^2(T, H)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI (1960) – *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1, Hermann, Paris.

[2] C. CHEVALLEY e S. EILENBERG (1948) – *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, «Trans. Am. Math. Soc.», *63*, 85–124.

[3] Séminaire «Sophus Lie», 1^e^ année: 1954–55, *Théorie des algèbres de Lie, topologie des groupes de Lie*, «E.N.S.», Paris (1955).

[4] N. TELEMAN (1972) – *A characteristic ring of a Lie algebra extension*, Note I e II, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (8) *52*, 498–506 e 708–711.