Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Nikolaus K. Stephanidis

Eine Integralformel für hyperbolische Geradenkongruenzen

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.6, p. 891–896.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_891_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Geometria differenziale. — *Eine Integralformel für hyperbolische Geradenkongruenzen.* Nota di NIKOLAUS K. STEPHANIDIS, presentata [(*)] dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. — Studio di una classe particolare di congruenze iperboliche di rette in uno spazio euclideo tridimensionale.

Betrachtet werden eine hyperbolische Geradenkongruenz und das Kurvengewebe auf der Mittenfläche der Kongruenz, das durch die SANNIAschen Hauptflächen [(1)] und eine Schar der Torsen bestimmt wird. Die sphärischen Bilder der Hauptflächen seien durch $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ bestimmt. Es bezeichne $\bar{q}$ (bzw. q) die geodätische Krümmung von $\omega_{31} = 0$ (bzw. $\omega_{32} = 0$), p_1, p_2 die Hauptdralle, k die Krümmung der Kongruenz, $\omega_{31} \wedge \omega_{32}$ das Flächenelement des sphärischen Bildes und k_1^* die Gewebekrümmung. Die PFAFFsche Ableitung längs $\omega_{32} = 0$ (bzw. $\omega_{31} = 0$) wird mit ∇_1 (bzw. ∇_2) bezeichnet. Es wird gezeigt:

$$\int_{\partial G} (\bar{q}\omega_{31} + q\omega_{32}) + \frac{1}{2}\int_{\partial G} (\nabla_1 \log(-p_2)\,\omega_{31} + \nabla_2 \log p_1\,\omega_{32}) = -\iint_G k_1^* \sqrt{-k}\,\omega_{31} \wedge \omega_{32}.$$

Mit Hilfe dieser Integralformel wird bewiesen:

SATZ. *Hat eine hyperbolische Geradenkongruenz zwei der folgenden drei Eigenschaften*: (a) *Das sphärische Bild der Hauptflächen ist isotherm.* (b) *Die Hauptflächen und irgendeine Schar der Torsen schneiden die Mittenfläche der Kongruenz in einem Sechseckgewebe.* (c) $(p_2/p_1) = a(u)\,b(v)$, *so besitzt sie auch die dritte.*

1. Eine Geradenkongruenz des dreidimensionalen euklidischen Raumes sei durch die Mittenfläche

$$\mathbf{OP} = \mathrm{P}(u, v) \tag{1.1}$$

und den Richtungseinheitsvektor $\boldsymbol{e}_3(u, v)$ dargestellt. Die Funktionen $\mathrm{P}(u,v)$, $\boldsymbol{e}_3(u,v)$ seien aus der Differenzierbarkeitsklasse C^3 in einem einfachzusammenhängenden Gebiet G der (u, v)–Ebene. Es wird ferner angenommen, dass die Kongruenz eineindeutig sphärisch abbildbar ist. Wir ergänzen

(*) Nella seduta del 29 giugno 1974.

(1) G. SANNIA, *Geometria differenziale delle congruenze rettilinee*, «Mathematische Annalen», *68*, 409–416 (1910).

$\boldsymbol{e}_3(u, v)$ zu einem orthonormierten Dreibein durch die Vektoren $\boldsymbol{e}_1(u, v)$, $\boldsymbol{e}_2(u, v)$, so dass $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ein Rechtssystem ist. Wir setzen

$$\mathrm{dP} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \, \boldsymbol{e}_i \tag{1.2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{3} \omega_{ji} \, \boldsymbol{e}_i \,, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{1.3}$$

Dann gelten

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

sowie die Integrabilitätsbedingungen, die man durch Anwendung des POINCARÉschen Satzes erhält:

$$\mathrm{d} \wedge \mathrm{dP} = 0, \tag{1.5}$$

$$\mathrm{d} \wedge \left(\sum_{i=1}^{3} \omega_{ji} \, \boldsymbol{e}_i \right) = 0 \,, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Hierin bezeichnet $\mathrm{d} \wedge \omega$ das äussere Differential der Form ω.

Es existieren Funktionen $l(u, v)$, $m(u, v)$, $n(u, v)$, so dass für die Differentialformen σ_1, σ_2 gilt:

$$\sigma_1 = - m\omega_{31} - n\omega_{32} \,, \tag{1.7}$$

$$\sigma_2 = l\omega_{31} + m\omega_{32} \,. \tag{1.8}$$

Dann ist

$$l\omega_{31}^2 + 2m\omega_{31}\,\omega_{32}^2 + n\omega_{32}^2 = 0 \tag{1.9}$$

die Differentialgleichung der Torsen der Kongruenz. Für das Krümmungsmass k und die mittlere Krümmung h der Kongruenz gelten die Beziehungen

$$k = \frac{\sigma_1 \wedge \sigma_2}{\omega_{31} \wedge \omega_{32}} = ln - m^2 \,, \tag{1.10}$$

$$2h = \frac{\sigma_1 \wedge \omega_{31} + \sigma_2 \wedge \omega_{32}}{\omega_{31} \wedge \omega_{32}} = l + n \,, \tag{1.11}$$

wobei das äussere Produkt von Differentialformen mit $\wedge$ bezeichnet wird. Geometrisch bedeutet $\omega_{31} \wedge \omega_{32}$ das Flächenelement des sphärischen Bildes der Kongruenz.

Die SANNIAschen Hauptflächen (kurz S–Hauptflächen) sind die Regelflächen der Kongruenz, für die der Drall Extremwerte annimmt. Die Differentialgleichungen $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ liefern genau dann die S– Hauptflächen der Kongruenz, wenn $m(u, v) = 0$ fur jedes $(u, v) \in \mathrm{G}$ gilt.

2. Wir nehmen nun an, dass die Kongruenz hyperbolisch gekrümmt ist, dass also für jedes $(u, v) \in G$ $k < 0$ gilt. In diesem Fall sind die beiden Torsenscharen reell und voneinander verschieden. Wir betrachten eine der Torsenscharen und die zwei Scharen der S– Hauptflächen der Kongruenz. Diese drei Scharen von Strahlflächen schneiden die Mittenfläche der Kongruenz in einem Kurvengewebe. Wir führen die S–Hauptflächen als Parameterflächen ein. Dann ist

$$l(u, v)\, n(u, v) < 0 \qquad \forall (u, v) \in G, \tag{2.1}$$

und ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass

$$l(u, v) > 0 \quad , \quad n(u, v) < 0 \qquad \forall (u, v) \in G \tag{2.2}$$

gilt. Eine Schar der Torsen der Kongruenz hat als Differentialgleichung

$$\sqrt{l}\, w_{31} + \sqrt{-n}\, \omega_{32} = 0\,. \tag{2.3}$$

Es sei R_1 das Kurvengewebe, das durch die S– Hauptflächen und die Schar (2.3) bestimmt wird. Wir bezeichnen mit $\overset{*}{k_1}$ die Krümmung von R_1. Wir betrachten die PFAFFschen Formen

$$\varphi_1 = -\sqrt{l}\,\omega_{31} \quad , \quad \varphi_2 = -\sqrt{-n}\,\omega_{32} \quad , \quad \varphi_3 = \sqrt{l}\,\omega_{31} + \sqrt{-n}\,\omega_{32}\,. \tag{2.4}$$

Als Differentialgleichungen des Kurvengewebes R_1 können wir die Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $i = 1, 2, 3$ nehmen. Für den Zusammenhang γ_1 von R_1 gilt

$$\gamma_1 = h_2\,\varphi_1 - h_1\,\varphi_2 = h_3\,\varphi_2 - h_2\,\varphi_3 = h_1\,\varphi_3 - h_3\,\varphi_1\,, \tag{2.5}$$

wobei gesetzt wurde:

$$d \wedge \varphi_i = h_i\,\Omega\,, \qquad i = 1, 2, 3\,, \tag{2.6}$$

$$\Omega = \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \varphi_3 \wedge \varphi_1\,. \tag{2.7}$$

Bezeichnen wir mit ∇_1 (bzw. ∇_2) die PFAFFsche Ableitung längs $\omega_{32} = 0$ (bzw. $\omega_{31} = 0$) und setzen

$$d \wedge \omega_{31} = q\,\omega_{31} \wedge \omega_{32}\,, \tag{2.8}$$

$$d \wedge \omega_{32} = \bar{q}\,\omega_{32} \wedge \omega_{31}\,, \tag{2.9}$$

so finden wir nach kurzer Rechnung

$$h_1 = \frac{1}{2\sqrt{-kl}}\,(\nabla_2 l - 2ql)\,, \tag{2.10}$$

$$h_2 = \frac{1}{2\sqrt{kn}}\,(\nabla_1 n - 2\bar{q}n)\,. \tag{2.11}$$

Somit erhalten wir

$$(2.12)\qquad 2\gamma_1 = (\nabla_1 \log(-n) - 2\bar{q})\,\omega_{31} + (\nabla_2 \log l - 2q)\,\omega_{32}\,.$$

Andererseits gilt für die Krümmung des Kurvengewebes

$$(2.13)\qquad k_1^* = \frac{d \wedge \gamma_1}{\Omega}\,.$$

Das Gebiet G sei so gewählt, dass der Stokessche Integralsatz

$$(2.14)\qquad \int_{\partial G} \gamma_1 = \iint_G d \wedge \gamma_1 \qquad (\partial G = \text{Rand von } G)$$

anwendbar ist. Beachten wir, dass für die Dralle p_1, p_2 der Hauptflächen die Formeln

$$(2.15)\qquad p_1 = \frac{1}{l} \qquad p_2 = \frac{1}{n}$$

gelten, so finden wir aus (2.12), (2.13) und (2.14)

$$(2.16)\qquad \int_{\partial G} (\bar{q}\omega_{31} + q\omega_{32}) + \frac{1}{2}\int_{\partial G} (\nabla_1 \log(-p_2)\,\omega_{31} + \nabla_2 \log p_1\,\omega_{32}) =$$

$$= -\iint_G k_1^* \sqrt{-k}\,\omega_{31} \wedge \omega_{32}\,.$$

In einer früheren Arbeit ([5], S. 7) ist folgende Integralformel hergeleitet worden:

$$(2.17)\qquad \int_{\partial G} \{(2\bar{q} + \nabla_1 \log(-p_2))\,\omega_{31} + (2q + \nabla_2 \log p_1)\,\omega_{32}\} =$$

$$= \iint_G \{\nabla_1\nabla_2 \log p_1 - \nabla_2\nabla_1 \log(-p_2) +$$

$$+ q\nabla_1 \log(-p_2) - \bar{q}\nabla_2 \log p_1 - 2(\nabla_2\bar{q} - \nabla_1 q)\}\,\omega_{31} \wedge \omega_{32}\,.$$

Da das Gebiet G beliebig ist, erhalten wir aus (2.16) und (2.17) für die Gewebekrümmung folgenden Ausdruck

$$(2.18)\qquad k_1^* = -\frac{1}{2\sqrt{-k}}\{\nabla_1\nabla_2 \log p_1 - \nabla_2\nabla_1 \log(-p_2) +$$

$$+ q\nabla_1 \log(-p_2) - \bar{q}\nabla_2 \log p_1 - 2(\nabla_2\bar{q} - \nabla_1 q)\}\,.$$

Bemerkung. Analog sei R_2 das Kurvengewebe auf der Mittenfläche der Kongruenz, das durch die S–Hauptflächen und die andere Schar der Torsen

$$\sqrt{l}\omega_{31} - \sqrt{-n}\omega_{32} = 0 \tag{2.19}$$

bestimmt wird. Es bezeichne γ_2 den Zusammenhang und k_2^* die Krümmung des Gewebes R_2. Man findet die Beziehungen

$$\gamma_2 = \gamma_1 , \tag{2.20}$$

$$k_2^* = - k_1^* . \tag{2.21}$$

3. Das zweite Randintegral der Formel (2.16) ist für jedes ∂G gleich Null genau dann, wenn der Ausdruck

$$\omega = \nabla_1 \log(-p_2)\, \omega_{31} + \nabla_2 \log p_1\, \omega_{32} \tag{3.1}$$

ein vollständiges Differential ist. Setzt man

$$\omega_{31} = \sqrt{e}\, du , \qquad \omega_{32} = \sqrt{g}\, dv , \qquad e > 0 , \qquad g > 0 \qquad \forall (u , v) \in G, \tag{3.2}$$

so ist

$$\nabla_1 \log(-p_2) = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial}{\partial u} \log(-p_2) \tag{3.3}$$

$$\nabla_2 \log p_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial v} \log p_1 , \tag{3.4}$$

und daher gilt

$$\omega = \frac{\partial}{\partial u} \log(-p_2)\, du + \frac{\partial}{\partial v} \log p_1\, dv . \tag{3.5}$$

Somit folgt: Die Differentialform ω ist genau dann ein vollständiges Differential, wenn

$$\frac{p_2}{p_1} = a(u)\, b(v) \tag{3.6}$$

ist, wobei $a(u)$ (bzw. $b(v)$) eine Funktion von u (bzw. v) allein ist. Gilt für jedes Gebiet G die Beziehung (3.6), so gilt auch die Integralformel

$$\int_{\partial G} (\bar{q}\omega_{31} + q\omega_{32}) = - \iint_G k_1^* \sqrt{-k}\, \omega_{31} \wedge \omega_{32} . \tag{3.7}$$

Umgekehrt: Gilt (3.7) für jedes Gebiet G, so gilt auch die Beziehung (3.6). Zu den Kongruenzen, für die (3.6) gilt, gehört jede Normalenkongruenz, denn es ist $h = 0$, also $p_1 + p_2 = 0$.

Das erste Randintegral von (2.16) verschwindet für jedes ∂G genau dann, wenn

$$\nabla_2 \bar{q} - \nabla_1 q = 0 \tag{3.8}$$

gilt, also genau dann, wenn das sphärische Bild der S–Hauptflächen ein Isothermennetz ist. Bekanntlich ist ein Kurvengewebe genau dann ein Sechseckgewebe, wenn die Gewebekrümmung identisch Null ist. Aus dem Vorangegangenen und aus (2.21) folgt der Satz, der in der Zusammenfassung angegeben wurde.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BLASCHKE W. (1955) – *Einführung in die Geometrie der Waben*. Birkhäuser, Basel und Stuttgart.

[2] BLASCHKE W. und BOL G. (1938) – *Geometrie der Gewebe*. Topologische Fragen der Differentialgeometrie. Springer, Berlin.

[3] DUBOURDIEU J. (1936) – *Question topologiques de géométrie différentielle*. Gauthier–Villars, Paris.

[4] STEPHANIDIS N. K. (1966) – *Sechseckgewebe auf Flächen negativer Krümmung*, «Monatsh. Math.», *70*, 261–269.

[5] STEPHANIDIS N. K. (1970) – *Integralformeln in der Liniengeometrie*, «Math. Nachr», *3*, 1–9.

[6] STEPHANIDIS N. K. (1972) – *Über Sechseckgewebe auf Flächen*, « Journal of Geometry », *2*, 29–34.