
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

LUIGIA PANELLA MARTINELLI

Isomeria di calotte riemanniane

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 56 (1974), n.6, p. 886–890.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_886_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Isometria di calotte riemanniane.*

Nota di LUIGIA PANELLA MARTINELLI, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — Two n -dimensional infinitesimal riemannian caps are isometric of order k if and only if the Riemann tensors and their derivatives of order $\leq k-3$ are equal.

1. Vari Autori hanno studiato e ampliato la nozione di isometria di calotte dello spazio euclideo, introdotta da E. Bompiani ⁽¹⁾. In particolare V. Dalla Volta [3] ha stabilito che affinché due calotte superficiali $\sigma_2^p, \bar{\sigma}_2^p$, di ordine p , dello spazio euclideo E_3 , siano isometriche di ordine k occorre e basta che nei centri $O, \bar{O}$ delle calotte coincidano le rispettive curvature e le loro derivate fino all'ordine $k-3$.

Va precisato che una isometria si dice di ordine k se essa fa corrispondere le forme quadratiche fondamentali ds^2 delle calotte fino all'ordine $k-1$, e che ovviamente deve supporre $p \geq k$.

Il risultato ora richiamato è stato esteso al caso di calotte n -dimensionali $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$, di ordine p , dello spazio euclideo E_{n+m} , da G. Vaccaro [7] per le isometrie di ordine $k=1, 2, 3$, e per quelle di ordine $k=4$ da F. Guaraldo [6], il quale ha preso in considerazione anche il tensore di curvatura (di Riemann).

Nel presente lavoro consideriamo, più in generale, isometrie tra *calotte riemanniane* n -dimensionali, di ordine p ⁽²⁾, che denoteremo tuttavia con gli stessi simboli $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$. Una tal calotta riemanniana si intende definita da un sistema completo di rappresentazioni coordinate regolari di classe C^p , con associata una forma differenziale quadratica definita positiva (con coefficienti di classe C^{p-1}).

Estendendo in modo ovvio la nozione di isometria tra le calotte riemanniane $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$, (n. 2), proveremo che:

TEOREMA. *Affinché una corrispondenza puntuale regolare $\mathcal{I}$ tra $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$, sia una isometria di ordine k , occorre e basta che siano uguali in $O, \bar{O}$ i valori dei tensori di Riemann e delle loro derivate fino all'ordine $k-3$ corrispondenti mediante $\mathcal{I}$, ovvero (in forma equivalente e nel senso precisato al n. 5) siano uguali i valori corrispondenti delle curvature riemanniane e delle loro derivate fino all'ordine $k-3$.*

Il risultato (che comprende chiaramente tutti i precedenti citati) è stabilito, in sostanza senza calcoli, basando sull'uso delle coordinate normali di Riemann.

(*) Nella seduta del 29 giugno 1974.

(1) Cfr., E. BOMPIANI [1], V. DALLA VOLTA [3], G. VACCARO [7], F. GUARALDO [5], [6].

(2) Secondo le nozioni generali introdotte da C. EHRESMANN (cfr. per esempio [4]), potrebbe parlarsi di *p-getti* di varietà riemanniane n -dimensionali.

2. Siano $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$ due calotte riemanniane (n. 1) e $\mathcal{J}: \sigma_n^p \rightarrow \bar{\sigma}_n^p$ una corrispondenza puntuale regolare (di classe C^p). Previo un eventuale cambiamento di coordinate $(x^i), (\bar{x}^i)$ ($i = 1, \dots, n$) atte a descrivere $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$, si può assumere $\mathcal{J}$ definita dalle: $\bar{x}^i = x^i$ (essendo inoltre sottinteso che i centri $O, \bar{O}$ delle calotte corrispondono all' n -pla nulla, (o), delle coordinate).

Se $\mathcal{J}$ è una isometria di ordine k si ha allora che i coefficienti delle forme quadratiche fondamentali $g_{ij} dx^i dx^j, \bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ risp. di $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$, sono uguali e così pure sono uguali le loro derivate fino all'ordine $k - 1$ per $(x^i) = (\bar{x}^i) = (o)$.

Ora il tensore di Riemann R_{ijhk} dipende dai coefficienti della forma quadratica fondamentale e dalle loro derivate fino al 2° . ordine. Ne segue che il tensore di Riemann e le sue derivate fino all'ordine $k - 3$, in coordinate $(x^i) = (\bar{x}^i)$, valutati in (o), si ottengono con gli stessi calcoli per $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$. Ciò prova la necessità della condizione necessaria e sufficiente per l'isometria espressa dal teorema enunciato al n. 1 (nella prima formulazione).

3. Per stabilire la sufficienza della condizione, fissiamo due riferimenti ortonormali $R_0, \bar{R}_0$, negli spazi vettoriali tangenti a $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$ in $O, \bar{O}$. Supposto l'ordine delle calotte $p \geq 3$ possiamo considerare *coordinate normali di Riemann* $(x^i), (\bar{x}^i)$ nelle varietà riemanniane $V_n, \bar{V}_n$ cui appartengono le calotte, con origini $O, \bar{O}$ e relative ai riferimenti $R_0, \bar{R}_0$ (3) (4).

Indichiamo con α^i ($i = 1, \dots, n$) i coseni direttori della tangente ad un arco di geodetica Ox ($x \equiv (x^i) \in V_n$) nel punto O e con τ la lunghezza dell'arco.

Ricordiamo che si ha $x^i = \alpha^i \tau$. Poiché $\sum_1^n (\alpha^i)^2 = 1$, risulta $\tau = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$. Analogamente per $\bar{V}_n$ si ha: $\bar{x}^i = \bar{\alpha}^i \bar{\tau}$, $\bar{\tau} = \sqrt{\sum_i (\bar{x}^i)^2}$.

Dimostreremo che, nelle ipotesi del teorema, si pone una isometria $\mathcal{J}$ di ordine k tra $\sigma_n^p, \bar{\sigma}_n^p$, mediante le equazioni $\bar{x}^i = x^i$ ($i = 1, \dots, n$). In ogni punto x di un intorno di O su V_n trasportiamo per parallelismo di Levi-Civita lungo l'arco di geodetica Ox , il riferimento R_0 nel riferimento ancora ortonormale R_x , e indichiamo con ω^i ($i = 1, \dots, n$) le forme differenziali lineari che esprimono il ds^2 , rispetto ad R_x , nella forma canonica $ds^2 = \sum_1^n (\omega^i)^2$.

In $x = O$ (il che denoteremo apponendo in basso l'indice o) risulta $(dx^i)_0 = (\alpha^i d\tau)_0$, $(ds)_0 = (d\tau)_0 = \sqrt{\sum_i (dx^i)_0^2}$, $(\omega^i)_0 = (dx^i)_0$, e

$$(3.1) \quad (\omega^i)_0 = (\alpha^i d\tau)_0.$$

In generale può scriversi:

$$(3.2) \quad \omega^i = \alpha^i d\tau + \pi^i$$

(3) Cfr. per esempio E. CARTAN [2], p. 234.

(4) L'ipotesi (che occorrerà) $p \geq 3$ esclude la possibilità di trattare per i valori più bassi di p i casi di isometria $k = 1, 2$, che sono d'altronde immediati e non implicano condizioni (cfr. per esempio la successiva nota (7)).

ove π^i è una forma differenziale nei differenziali $d\alpha^i$ (non indipendenti, come risulta differenziando la $\sum_i (\alpha^i)^2 = 1$). Dalla (3.2), tenuto conto di (3.1) si ha

$$(3.3) \quad (\pi^i)_0 = 0.$$

Ricordiamo ⁽⁵⁾ che le forme π^i soddisfano (con i loro coefficienti) ad un sistema di equazioni differenziali che può scriversi concisamente così

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 \pi^i}{\partial \tau^2} = R_{kijh} \alpha^k \alpha^h \pi^j$$

dove R_{kijh} è il tensore di Riemann e valgono le condizioni iniziali

$$(3.5) \quad (\pi^i)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \right)_0 = d\alpha^i,$$

delle quali la prima coincide con la (3.3) e la seconda si deduce dalle equazioni di struttura di V_n .

Ora si osservi che per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali del tipo (3.4), una volta note le funzioni R_{kijh} e assegnati i coseni direttori α^i esiste ed è individuata una soluzione soddisfacente le condizioni iniziali (3.5), cioè sono individuate le forme π^i , e quindi - stanti le (3.2) - anche le ω^i , in un intorno di O su V_n . In particolare per valutare in O le π^i e le loro derivate successive rispetto a τ , non vi è che da derivare le (3.4), avuto riguardo alle (3.5).

Supposto noto in O il tensore di Riemann e le sue derivate fino all'ordine $k-3$, si ottengono così, in O , π^i e le sue derivate fino all'ordine $k-1$.

4. Ciò premesso, formule analoghe alle (3.1)-(3.5) e considerazioni analoghe a quelle svolte sussistono in $\bar{V}_n$. Inoltre per $\bar{x} = \mathcal{J}(x)$ risulta $\bar{x}^i = x^i$, $\bar{\tau} = \tau$.

Per ipotesi le componenti $\bar{R}_{kijh}$ del tensore di Riemann in $\bar{O}$ su $\bar{V}_n$ espresse in coordinate normali $\bar{x}^i = x^i$ coincidono con le componenti R_{kijh} del tensore di Riemann in O su V_n , e lo stesso dicasi per le derivate fino all'ordine $k-3$.

Ne segue che coincidono in O , $\bar{O}$ le forme $\bar{\pi}^i$, π^i e le loro derivate rispetto a $\tau = \bar{\tau}$ fino all'ordine $k-1$. Tenuto conto delle (3.2) e delle analoghe per $\bar{V}_n$, la differenza delle forme quadratiche fondamentali di V_n , $\bar{V}_n$ (pensando di svilupparne i coefficienti con la formula di Taylor rispetto alle potenze di $\delta\tau$ ⁽⁶⁾, nell'intorno di $\tau = 0$) può scriversi:

$$(4.1) \quad ds^2 - d\bar{s}^2 = \varepsilon(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \delta\tau^{k-1},$$

(5) Cfr., E. CARTAN [2], p. 237.

(6) Scriviamo $\delta\tau$ anziché $d\tau$, e analogamente in seguito, per non confondere con i differenziali che appaiono nelle forme quadratiche in considerazione.

ove ε è una forma differenziale quadratica con coefficienti infinitesimi (rispetto a $\delta\tau$), dipendenti dai coseni direttori $(\alpha^i) = (\bar{\alpha}^i)$ delle tangenti alle geodetiche in $O, \bar{O}$ corrispondentisi mediante $\mathcal{J}$.

Ora la (4.1) ci dice appunto che $\mathcal{J}$ è una isometria di ordine k . Invero supposto si tratti di isometria di ordine h e *non* maggiore, il primo membro della (4.1) può esprimersi al modo seguente:

$$(4.2) \quad f_{ij}^{(h)}(\delta x_1, \dots, \delta x_n) dx^i dx^j,$$

dove $f_{ij}^{(h)}$ sono forme di grado h con coefficienti *non* (tutti) infinitesimi rispetto ai δx^i .

Ricordando che $\delta x^i = \alpha^i \delta\tau$, la (4.2) diviene

$$(4.3) \quad [f_{ij}^{(h)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) dx^i dx^j] \delta\tau^h.$$

È chiaro che, essendo la forma ε in (4.1) con coefficienti infinitesimi e quella che appare in (4.3) no, le due espressioni (4.1), (4.3) possono coincidere soltanto per $h > k - 1$ cioè $h \geq k$. Ciò prova che $\mathcal{J}$ è una isometria di ordine k (almeno).

È così provata anche la parte inversa del teorema enunciato al n. 1 con riguardo alla considerazione del tensore di Riemann ⁽⁷⁾.

Osservazione. Si noti che dalle considerazioni del n. 3 risulta l'esistenza di *infinite* isometrie $\mathcal{J}$ (precisamente $\infty^{\binom{n}{2}}$) soddisfacenti alle condizioni volute. Infatti, una volta fissato per esempio il riferimento ortonormale R_0 di origine O , una isometria $\mathcal{J}$ si ottiene in corrispondenza alla scelta arbitraria di un riferimento ortonormale $\bar{R}_0$ di origine $\bar{O}$.

5. Volendo far intervenire nel teorema del n. 1, in luogo del tensore di Riemann e delle sue derivate, la curvatura riemanniana (secondo le varie faccette piane) e le sue derivate, si può procedere così.

Per ogni faccetta tangente a V_n in O resta individuata una faccetta tangente in ogni punto x appartenente ad un intorno di O su V_n , trasportata per parallelismo lungo l'arco di geodetica Ox . Tali faccette sono tutte determinate dalle stesse componenti di bivettori rispetto ai riferimenti R_x e le diremo brevemente costituire un *sistema geodeticamente parallelo* di faccette tangenti. Analogamente per $\bar{V}_n$.

Le curvature secondo le faccette di un sistema geodeticamente parallelo sono funzioni lineari delle componenti del tensore di Riemann, quindi è chiaro che i valori in O di tali componenti e delle loro derivate determinano i valori delle curvature e delle loro derivate fino allo stesso ordine $k - 3$.

(7) Per $p \geq k = 2$ è ancora possibile considerare coordinate normali di Riemann e dalle sole (3.5) segue subito che $\mathcal{J}$ è un'isometria di 2° ordine. Per $p \geq k = 1$, $\mathcal{J}$ definita dalle sole condizioni $d\bar{x}^i = dx^i$ (con riguardo ai riferimenti $R_0, \bar{R}_0$) risulta un'isometria di 1° ordine già dalle $(ds^2)_0 = (d\bar{s}^2)_0 = \Sigma_i (dx^i)^2$.

Per stabilire che è vera anche l'affermazione inversa occorre ricordare che, viceversa, le curvature in un punto x individuano le componenti in x del tensore di Riemann ⁽⁸⁾, e pertanto le relazioni che esprimono le derivate delle curvature fino all'ordine $k-3$ mediante le derivate corrispondenti del tensore di Riemann sono risolubili univocamente rispetto a queste ultime.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BOMPIANI (1948) – *Isometria di calotte superficiali*, « Rend. di Mat. » (V), 7, 274–294.
- [2] E. CARTAN (1946) – *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 2^a ed.
- [3] V. DALLA VOLTA (1949) – *Sull'isometria di calotte superficiali*, « Rend. di Mat. » (V) 8, 211–227.
- [4] C. EHRESMANN (1953) – *Les prolongements d'une variété différentiable*. Atti IV Congr. U.M.I., vol. II, Ed. Cremonese, 317–325.
- [5] F. GUARALDO (1973) – *Isometria di calotte appartenenti a varietà*, « Rend. di Mat. » (VI) 6, 155–169.
- [6] F. GUARALDO (1973) – *Ulteriori contributi alla teoria dell'isometria di calotte*, « Rend. di Mat. » (VI), 6, 629–636.
- [7] G. VACCARO (1953) – *Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà*, « Rend. Lincei », 14, 404–407.

(8) Cfr., E. CARTAN [2], p. 196.