Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gabriele Korchmaros

Una limitazione per il volume di un simplesso n-dimensionale avente spigoli di date lunghezze

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.6, p. 876–879.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_876_0>

Geometria. — *Una limitazione per il volume di un simplesso n–dimensionale avente spigoli di date lunghezze.* Nota di GABRIELE KORCHMÁROS, presentata [(*)] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A conjecture stated by D. Veljan (concerning the volume of an n–dimensional simplex) is proved, and an inequality for any set of $n+1$ real positive numbers is deduced. (For a general approach to inequalities of the type of the one here obtained, see B. Segre [7]).

È noto che per il volume $|V|$ di un simplesso $A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$ dello spazio euclideo n–dimensionale si intende la quantità:

$$|V| = 1/n! \cdot |D| \tag{1}$$

dove

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} \, c_{12} \cdots c_{1n} & 1 \\ c_{21} \, c_{22} \cdots c_{1n} & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ c_{n+1,1} \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

essendo $A_i = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$.

È classica la limitazione per il valore di tale volume data da Hadamard ([4], [5]); denotando con $a_{ij} = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} (c_{il} - c_{jl})^2}$ la lunghezza dello spigolo $A_i A_j$ $(1 \leq i < j \leq n+1)$ del simplesso $A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$, risulta sempre

$$|V| \leq \frac{1}{n!} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} a_{ij} \tag{3}$$

l'uguaglianza essendo verificata se, e soltanto se, le n rette $A_i A_j$ uscenti dal punto A_j $(i = 1, 2, \cdots, n+1, i \neq j)$ sono tra loro due a due ortogonali.

Moltiplicando fra di loro le disuguaglianze per j che varia da 1 a $n+1$ e poi estraendo la radice $(n+1)$–esima, si giunge alla:

$$|V| \leq 1/n! \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} a_{ij}^{2/n+1}. \tag{4}$$

D. Veljan enunciò sotto forma di congettura [6] una migliore limitazione della (4) così derivabile da quella di Hadamard per il volume del simplesso, e precisamente la

$$|V| \leq 1/n! \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} a_{ij}^{2/n+1}, \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 29 giugno 1974.

l'uguaglianza caratterizzando i simplessi regolari (a spigoli uguali). Volendo esprimere la cosa con il linguaggio dei determinanti:

$$|D| \leq \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \{(c_{i1} - c_{j1})^2 + \cdots + (c_{i,n} - c_{j,n})^2\} \tag{6}$$

essendo verificate l'uguaglianza se, e soltanto se, le $n(n+1)/2$ espressioni entro graffe sono a due a due uguali fra loro.

Nel presente lavoro dimostriamo la congettura di Veljan, risultato dal quale deduciamo poi una disuguaglianza fra numeri reali positivi.

1. La dimostrazione si svolge mediante induzione completa. Il primo valore di n per cui l'affermazione è non banale è $n = 2$. Si deve quindi provare che, per l'area F di un triangolo di lati a, b, c, è valida la limitazione

$$F \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (abc)^{2/3}. \tag{7}$$

La (7) si verifica assai semplicemente nel modo seguente. Abbiamo com'è ben noto

$$F = 1/2\, ab \sin \gamma = 1/2\, bc \sin \alpha = 1/2\, ca \sin \gamma,$$

dove α, β, γ siano gli angoli rispettivamente opposti ai lati a, b, c, e quindi

$$F^3 = 1/2^3 a^2 b^2 c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Siccome da $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

così ne discende subito la (7). L'uguaglianza sussiste qui se e soltanto se $\alpha = \beta = \gamma$, eppertanto nella (7) se e soltanto se $a = b = c$.

Poggeremo la dimostrazione induttiva del caso generale sui due seguenti noti risultati.

I. *Indicheremo il simplesso n–dimensionale* $A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$ *con* V, *le sue facce* $(n-1)$*–dimensionale con* V_i $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$; *inoltre, se* $|X|$ *è un simplesso k–dimensionale nello spazio euclideo n–dimensionale* $(2 \leq k \leq n)$ *allora* $|X|$ *denoterà il suo volume k–dimensionale. Fissato un punto* O *interno, al simplesso* V, *e designato con* $OB_i = u_i$ *il vettore unitario e ortogonale sulla faccia* $A_1 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_{n+1}$, *i vettori* $u_1, u_2, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_{n+1}$ *definiscono nello spazio euclideo n–dimensionale un simplesso n–dimensionale* U_i $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$. *Ebbene, tra i valori* $|V|, |V_i|$, *ed* $|U_i|$ *intercede la seguente relazione* [1]:

$$|V| = 1/n \sqrt[n-1]{n!\,(n-1)!\,|V_1|\,|V_2| \cdots |V_{i-1}|\,|V_{i+1}| \cdots |V_{n+1}|\,|U_i|}. \tag{8}$$

II. *L'unione dei simplessi* U_i *è manifestatamente un simplesso n–dimensionale, iscritto nella sfera di centro* O *e raggio unitario, che denoteremo con* U. *Risulta allora*

$$|U| \leq \frac{(n+1)^{n+1/2}}{n!\, n^{n/2}}, \tag{9}$$

dove l'uguaglianza sussiste se, e soltanto se, U *è un simplesso regolare* [3].

Fatte queste premesse, supponiamo com'e lecito, $n \geq 2$. Dalle (8), moltiplicandole a membro a membro, segue

$$|V|^{n+1} = \frac{1}{n^{n+1}} \sqrt[n-1]{(n-1)!^{n+1} |V_1|^n \cdots |V_{n+1}|^n |U_1| \cdots |U_{n+1}| (n!)^{n+1}}.$$

Poiché, per il classico teorema delle due medie,

$$|U_1||U_2| \cdots |U_{n+1}| \leq \left\{\frac{|U_1| + |U_2| \cdots |U_{n+1}|}{n+1}\right\}^{n+1} \tag{10}$$

ed inoltre, in conseguenza della (9),

$$|U_1| + |U_2| + \cdots + |U_{n+1}| = |U| \leq \frac{(n+1)^{n+1/2}}{n!\, n^{n/2}},$$

ne risulta:

$$|V|^{n+1} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \sqrt{|V_1|^n \cdots |V_{n+1}|^n (n-1)!^{n+1} (n+1)^{(n^2-1)/2} / n^{(n/2)(n+1)}}.$$

Ora, in virtù dell'ammessa induzione, si ha

$$|V_1|^n |V_2|^n \cdots |V_{n+1}|^n \leq \{n^{n/2}/\{(n-1)!\}^n\, 2^{(n^2-1)n}\}^{n+1} \prod a_{ij}^{2(n-1)}$$

sussiste dunque la

$$|V|^{n+1} \leq \{1/(n!)^{n+1}\}\{(n+1)/2^n\}^{n+1/2} \prod a_{ij}^2$$

e quindi la (5). È poi ormai facile verificare che, in base al procedimento seguito l'uguaglianza sussiste nella (5) se, e soltanto se, V è un simplesso regolare.

2. Se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ denotano $n+1$ parametri reali positivi arbitrari, ad essi si può associare un simplesso n–dimensionale V, dotato di ortocentro, per il quale (ved. [2]) sussistono le

$$a_{ij}^2 = \lambda_i + \lambda_j, \tag{11}$$

$$n!\,|V|^2 = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right). \tag{12}$$

Sostituendo le (11), (12) nelle (5), con un calcolo semplicissimo si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}/[(n+1)\lambda_i] \leq G(\lambda_i, \lambda_j)$$

dove $G(\lambda_i, \lambda_j)$ indica la media geometrica degli $n(n+1)/2$ numeri $(\lambda_i + \lambda_j)/2$ $(1 \leq i < j \leq n+1)$. Nella (13) le λ denotano $n+1$ numeri reali positivi qualsiasi; in essa, in base a ciò che precede, l'uguaglianza sussiste se e soltanto se $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1}$.

Procedimenti generali per stabilire disuguaglianze del tipo della (13), con l'uguaglianza valida se e soltanto se gli argomenti che in esse compaiono risultano uguali fra loro, sono stati introdotti ed ampiamente utilizzati in B. Segre [7].

BIBLIOGRAFIA

[1] BARTOS P. (1971) – *Sinusova vetach v* E_n, «Cas. Pest. Mat.», *93*, 71–74.
[2] EGERVÁRY J. (1951) – *Ortocentrikus szimplexekröl*, «Az I, Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei», Budapest, 387–396.
[3] FEJES TÓTH L. (1965) – *Reguläre Figuren*, «Akadémiai Kiadó», Budapest, pp. 291.
[4] HADAMARD J. (1893) – «Bull. Sciences Math.» (2), *17*, 240–248.
[5] FISCHER E. – *Über den Hadamardschen Satz*, «Archiv der Math. Phys.», (3), *13*, 32–40.
[6] VELJAN D. – *Problem 629 A*, «Elemente der Math.», (25), *4*, 92.
[7] SEGRE B. (1972) – *Inequalities concerning symmetric or almost symmetric functions*, «Tensor», *23*, 273–287.