Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Bartocci

Su di una congettura di Sudbery

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.6, p. 856–858.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_856_0>

Algebra. — *Su di una congettura di Sudbery* (*). Nota di

UMBERTO BARTOCCI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper a conjecture of Sudbery concerning the relations between the roots of a polynomial and of its derivatives is disproved and some remarks on the subject are made.

In un recente articolo ([3]) (1) A. Sudbery ha congetturato che:

« Ogni polinomio $f(x)$ di grado $N > 1$ ed a coefficienti in un campo K algebricamente chiuso, avente caratteristica p che sia zero o maggiore di N, ammette una radice α che non è radice di $f^{(r)}(x)$ – il polinomio r–mo derivato di $f(x)$ – per ogni $r > k - 1$, ove si denoti con k la molteplicità di α come radice di $f(x)$ ».

Nel caso $p = 0$, la proposizione discende dal cosiddetto *Lemma di Gauss–Lucas* (ved. p. es. [1]) e dal *principio di Lefschetz* (ved. p. es. [4], p. 306). Infatti il primo asserisce che:

« Se $f(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado $N > 1$, le radici del suo polinomio derivato $f'(x)$ giacciono nel piano complesso nell'interno o sul contorno della chiusura convessa dell'insieme delle radici di $f(x)$ ».

Pertanto, se $f(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi, si può supporre che $f(x)$ ammetta più di una radice, poiché altrimenti la congettura di Sudbery risulterebbe ovviamente soddisfatta. Basta allora prendere una radice α di $f(x)$ sul contorno di detta chiusura convessa, in guisa tale che α non stia sul contorno della chiusura convessa delle radici rimanenti, per avere una radice α che soddisfa manifestamente alla congettura di Sudbery. Se $f(x)$ è un polinomio a coefficienti in un qualunque campo K algebricamente chiuso di caratteristica $p = 0$, basta prendere un'immersione del campo generato sopra **Q** dai coefficienti di $f(x)$ in **C** (2) per avere il risultato nel caso generale (*principio di Lefschetz*).

In questa breve Nota osserviamo anzitutto come la congettura sia falsa nel caso della caratteristica positiva, fornendo un semplice controesempio:

$$x^4 + x^3 + 3x = x(x-2)(x-1)^2, \tag{1}$$

ove questo polinomio venga considerato in un campo K di caratteristica $p = 5$.

(*) Lavoro eseguito presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Cambridge (Inghilterra) usufruendo di una borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 29 giugno 1974.

(1) I numeri tra [ ] rimandano alla Bibliografia posta in fine al lavoro.

(2) **Q** e **C** denotino rispettivamente il campo dei numeri razionali e quello dei numeri complessi.

Il polinomio (1) è un particolare elemento della seguente « famiglia » di controesempi, dipendenti da un parametro β in un campo di caratteristica 5:

$$x(x+3\beta)(x^2+3\beta x+\beta^2) = x^4+\beta x^3+3\beta^3 x \tag{2}$$

[ponendo in (2) $\beta = 1$ si ottiene il polinomio (1)].

Non è difficile ottenere altre famiglie di controesempi, quale

$$x^5+\beta x^4+4\beta^2 x^3+\beta^4 x = x(x^2+2\beta x+4\beta^2)(x^2-\beta x+2\beta^2), \tag{3}$$

dipendente di nuovo da un parametro β, in un campo di caratteristica 7.

Vogliamo peraltro rilevare come si possa stabilire la seguente

PROPOSIZIONE I. *Per ogni valore del grado* $N > 1$, *esiste una costante intera* $C(N)$ (3), *dipendente soltanto da* N, *tale che, se* p *non divide* $C(N)$, *allora la congettura di Sudbery è vera in caratteristica* p.

Dimostrazione. Un polinomio $f(x)$ a coefficienti in un campo K algebricamente chiuso qualsiasi verrà detto *di tipo* $r_1, \cdots, r_h$, con $0 < r_1 \le r_2 \le \le \cdots \le r_h$, se

$$f(x) = (x-\alpha)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_h)^{r_h}$$

colle $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h$ distinte. Mostreremo intanto come, per ogni « tipo » $r_1, \cdots, r_h$ si possa determinare una costante $C(r_1, \cdots, r_h)$ tale che, se p non divide $C(r_1, \cdots, r_h)$, allora la congettura di Sudbery è vera per polinomi di tipo $r_1, \cdots, r_h$ in caratteristica p. Per ottenere la Proposizione I, basterà pertanto in essa assumere $C(N) = \prod C(r_1, \cdots, r_h)$, ove il prodotto sia esteso a tutte le possibili decomposizioni

$$N = r_1 + r_2 + \cdots + r_h, \qquad \text{con } r_1 \le \cdots \le r_h.$$

Allo scopo di ottenere la suddetta costante $C(r_1, \cdots, r_h)$, introduciamo h indeterminante $t_1, \cdots, t_h$ sopra il campo $\mathbf{Q}$ e consideriamo il *polinomio generico* di tipo $r_1, \cdots, r_h$

$$\varphi(x) = (x-t_1)^{r_1}\cdots(x-t_h)^{r_h}.$$

Definiti gli h polinomi P mediante le:

$$P^{r_1}(x) = \prod_{i=r_1}^{N} \varphi^{(i)}(x), \cdots, P^{r_h}(x) = \prod_{i=r_h}^{N} \varphi^{(i)}(x),$$

consideriamo le espressioni

$$P^{r_1}(t_1), \cdots, P^{r_h}(t_h).$$

Si tratta di polinomi a coefficienti interi nelle indeterminate $t_1, \cdots, t_h$, ed il Lemma di Gauss-Lucas si può algebricamente esprimere per il tramite del Teorema degli zeri di Hilbert (cfr. ad esempio [2]), osservando che il sistema

$$P^{r_1}(t_1) = 0, \cdots, P^{r_h}(t_h) = 0$$

(3) Ma la determinazione di C (N), anche in casi particolari, non sembra agevole.

non ha soluzioni che non siano contenute nella varietà di equazioni

$$t_1 - t_2 = 0, \cdots, t_1 - t_h = 0, \cdots, t_{h-1} - t_h = 0.$$

Esistono di conseguenza una costante $C(r_1, \cdots, r_h)$ nell'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi, polinomi $A_1(t), \cdots, A_h(t) \in \mathbf{Z}[t]$ – ove t denoti il complesso $t_1, \cdots, t_h$ –, ed un intero $m > 0$ tali che sussista identicamente la

$$P^{r_1}(t_1) A_1(t) + \cdots + P^{r_h}(t_h) A_h(t) = C(r_1, \cdots, r_h) \prod_{i \neq j} (t_i - t_j)^m. \tag{4}$$

È chiaro ora che – dal sussistere identico della (4) – discende il risultato che avevamo in vista, specializzando ivi $t_1, \cdots, t_h$ in elementi distinti $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ di K e riducendo i coefficienti interi dell'identità modulo p.

L'interesse di ciò che precede risiede nella seguente Proposizione, la cui dimostrazione discende dalla Prop. I usufruendo di un'argomentazione analoga a quella impiegata da Sudbery [3] per stabilire il suo Teorema 1.

PROPOSIZIONE II. *Per ogni valore del grado* $N > 1$, *esiste una costante* $C(N)$ *dipendente soltanto da* N *tale che, se* p *non divide* $C(N)$, *allora il polinomio*

$$\pi(x) = \prod_{i=0}^{N} f^{(i)}(x)$$

ammette almeno $N + 1$ *radici distinte, se* $f(x)$ *non è della forma* $(x - \alpha)^N$.

Lasciando al Lettore la ormai semplice dimostrazione, vogliamo rilevare come anche le classi di controesempi (2) e (3) siano tali che, costruito a partire da un polinomio $f(x)$ in tali classi il polinomio $\pi(x)$ di cui alla Prop. II, il numero delle radici distinte di $\pi(x)$ è almeno $N + 1$. Non si può quindi escludere che la Prop. II abbia incondizionata validità per $p > N$.

Osserviamo infine che, mentre le classi di controesempi (2) e (3) sono formate da polinomi con radici multiple, l'Autore non è riuscito a trovare controesempi con polinomi *semplici*, dotati di radici tutte semplici. Nasce quindi il sospetto che la congettura di Sudbery possa valere incondizionatamente quando si ammetta soltanto che si abbia $p > N$ ed il polinomio $f(x)$ a cui la si riferisce sia semplice.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. IRWIN (1915) – *Relation between the roots of a rational integral function and its derivatives*, «Ann. of Math.», *16*.

[2] B. SEGRE (1972) – *Prodromi di Geometria Algebrica*, Ed. Cremonese, Roma.

[3] A. SUDBERY (1973) – *The number of distinct roots of a polynomial and its derivatives*, «Bull. London Math. Soc.», *5*.

[4] A. WEIL (1946 e 1962) – *Foundations of Algebraic Geometry*, «Am. Math. Soc. Coll. Publ.», *29*.