Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Piero Caldirola

Sul moto di una particella in vari tipi di campi nella relatività generale. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.5, p. 761–766.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_5_761_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Fisica. — *Sul moto di una particella in vari tipi di campi nella relatività generale.* Nota II [*] del Corrisp. PIERO CALDIROLA.

SUMMARY. — Some properties of motion equations in General Relativity for a particle under the influence of external forces in addition to the gravitation are studied. The geometrical interpretation of many results is discussed.

In particular it is shown that the external forces are acting in such a way that a particle describes in the space time variety, instead of a geodesics, a curve for which the geodetical curvature vector is given by the external force acting on the unitary mass and along which the velocity vector undergoes a Fermi transport. The results obtained are applied to the study of the behaviour of a charged particle moving in a uniform gravitational field and under the action of an electrical field due to a charge at rest in a point of the space.

1. L'ACCELERAZIONE DELLA PARTICELLA E SUA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

In una Nota precedente [1] ci siamo occupati di scrivere le equazioni del moto di una particella nella Relatività generale quando su di essa agiscono, oltre alla gravitazione, anche campi esterni di diverso tipo. Nel caso ad esempio di un campo esterno derivante da un potenziale vettore Φ^i e da un potenziale scalare φ, tali equazioni potevano essere derivati per una metrica riemanniana generica caratterizzata dalla forma fondamentale:

$$-\,\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3\,,4) \tag{1}$$

dalla lagrangiana:

$$\mathrm{L} = -\,m_0 + e u_i \Phi^i - \alpha\varphi \tag{2}$$

con il vincolo

$$g_{ik}\,u^i u^k + 1 = 0 \tag{3}$$

mediante il principio variazionale:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{L}^*\,\mathrm{d}s = 0 \tag{4}$$

con

$$\mathrm{L}^* = \mathrm{L} + \frac{\lambda}{2}\,(g_{ik}\,u^i u^k + 1).$$

(*) Presentata nella seduta del 28 maggio 1974.

(1) P. CALDIROLA, « Rend. Acc. Lincei », *56* (4), 575 (1974).

Tali equazioni risultavano date da:

$$\frac{du^r}{ds} + \left\{ {r \atop i \quad k} \right\} u^i u^k = \frac{e}{m_0} F^{rk} u_k - \frac{\alpha}{m_0} \left[\frac{d(\varphi u^r)}{ds} + \varphi^{/r} \right] \tag{5}$$

ove

$$F_{rk} = \Phi_{k/r} - \Phi_{r/k} .$$

Assumendo per l'accelerazione cronotopica il vettore

$$a^i = \frac{Du^i}{Ds} \tag{6}$$

dove si sono usate le notazioni di Weinberg [2] per la derivata covariante di un vettore lungo una linea $x^i(s)$ e cioè:

$$\frac{DA^i}{Ds} \equiv \frac{dA^i}{ds} + \left\{ {i \atop k \quad l} \right\} u^k A^l ,$$

la (5) può scriversi sinteticamente:

$$a^i = \frac{Y^i}{m_0} \tag{7}$$

ove si è posto

$$Y^i = e F^{ik} u_k - \alpha \left[\frac{d(\varphi u^i)}{ds} + \varphi^{/i} \right]$$

ad indicare la forza totale esterna.

Vogliamo anzitutto dare alcune espressioni equivalenti per l'accelerazione cronotopica a^i.

Tenendo presente che d indica la variazione lungo la linea avente parametri u^i, si ha:

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{\partial u^i}{\partial x^l} \frac{dx^l}{ds} = u^l \frac{\partial u^i}{\partial x^l}$$

per cui la (5) si scrive

$$a^i = u^l \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^l} + \left\{ {k \quad l \atop i} \right\} u^k \right) = \frac{Y^i}{m_0}$$

o anche usando la consueta notazione per la derivata covariante:

$$a^i = u^l u^i{}_{/l} \tag{8}$$

o con ovvio spostamento degli indici

$$a_i = u^l u_{i/l} . \tag{8'}$$

D'altra parte dalla (3) discende:

$$u^l u_{l/i} = 0 .$$

Sottraendo questa espressione dalla precedente si ha:

$$a_i = u^l (u_{i/l} - u_{l/i})$$

(2) S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology*, pp. 110. New York 1972.

che può anche essere scritta nella forma particolarmente semplice:

$$a_i = u^l \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \frac{\partial u_l}{\partial x^i} \right) . \tag{9}$$

Osserviamo che vale la notevole relazione di ortogonalità:

$$a_i u^i = u^i u^l \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \frac{\partial u_l}{\partial x^i} \right) = 0 \tag{10}$$

come si verifica immediatamente scambiando tra loro i due indici muti i , l.

La (10) esprime geometricamente il fatto ben noto che il vettore a^i coincide col vettore curvatura geodetica della linea s, il quale è normale alla linea che ha per parametri di direzione gli $u^i = \frac{dx^i}{ds}$.

Osserviamo che nel caso di assenza di forze esterne ($Y^i = 0$), la (7) diventa

$$a_i = u^l \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \frac{\partial u_l}{\partial x^i} \right) = 0$$

che, come risulta dal procedimento seguito, equivale alle equazioni della geodetica

$$\frac{du^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} k & l \\ & i \end{matrix} \right\} u^k u^l = 0 .$$

Possiamo quindi dire che, con la definizione di accelerazione cronotopica adottata, in assenza di forze esterne una particella descrive, come è ben noto, una geodetica e che tale moto corrisponde all'annullarsi del vettore accelerazione in ogni punto della traiettoria nello spazio tempo. Tale traiettoria è una linea a curvatura geodetica nulla.

Sotto l'azione di un campo di forze esterne la particella percorre invece una traiettoria $x^i(s)$ che non è più una geodetica della varietà spazio–temporale ma che tuttavia gode sempre della proprietà che i suoi parametri di direzione coincidono con le componenti u^i del vettore velocità mentre il vettore curvatura geodetica coincide con il vettore accelerazione a^i.

In altri termini la presenza di un campo esterno Y^i ha per effetto di far passare la traiettoria della particella libera che coincide con una geodetica della varietà a una linea con curvatura geodetica non nulla caratterizzata dal vettore Y^i/m_0. Si vede quindi che mentre la presenza di un campo gravitazionale determina la curvatura della varietà spazio–temporale, quella di forze esterne determina la curvatura geodetica delle linee d'universo descritte dalla particella in moto.

2. CAMPI ESTERNI E TRASPORTO DI FERMI

L'essere, in assenza di forze esterne, $a^i = \frac{Du^i}{Ds} = 0$ esprime, come è ben noto, il fatto che il vettore u^i subisce un trasporto parallelo di Levi–Civita lungo la curva C_L rappresentata parametricamente da $x^i(s_0)$ che risulta essere una geodetica, il che significa essendo $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ un vettore tangenziale alla C_L che la geodetica è una linea autoparallela.

Ci si può chiedere se nel caso di $Y^i \neq 0$ anche la curva $x^i(s)$ descritta dalla particella può avere un significato geometrico preciso. A questo scopo ricordiamo l'esistenza di un altro tipo di trasporto, oltre quello di Levi-Civita, che gode di importanti proprietà soprattutto rispetto alla possibilità di interpretazione fisica: il cosiddetto trasporto di Fermi (3). È questo un trasporto che avviene lungo una linea C_F e che, nel caso di un vettore generico A^i, soddisfa alla seguente equazione (4):

$$\frac{DA^i}{Ds} - W^{ik} A_k = 0 \tag{11}$$

dove W^{ik} indica il tensore emisimmetrico:

$$W^{ik} = -W^{ki} = u^i \frac{Y^k}{m_0} - \frac{Y^i}{m_0} u^k . \tag{12}$$

Tale trasporto per il vettore u^i coinciderà con le leggi del moto di una particella sotto l'azione delle forze esterne da noi considerate, oltre naturalmente a quelle del campo gravitazionale, se sarà soddisfatta la (7). Ma ciò si verifica immediatamente. Infatti ricordando che $Y^k u_k = 0$ e $u_k u^k = -1$, si ha:

$$\frac{Du^i}{Ds} = W^{ik} u_k = \frac{1}{m_0}(u^i Y^k - u^k Y^i) u_k = \frac{1}{m_0}(u^i u_k Y^k - u^k u_k Y^i) = \frac{Y^i}{m_0} .$$

Vediamo quindi come la presenza di forze esterne Y^i del tipo di quelle da noi considerate, modifica la legge del moto di una particella facendola passare da una geodetica C_L della varietà spazio-temporale, lungo la quale il vettore velocità subisce un trasporto parallelo di Levi-Civita, a una curva C_L lungo la quale detto vettore subisce un trasporto di Fermi. Per la nuova traiettoria il vettore curvatura geodetica, come già si è detto, non è più nullo ma uguale alla forza esterna per unità di massa.

Notiamo infine come nel caso in cui il campo esterno è costituito unicamente dal campo elettromagnetico il principio variazionale vincolato assunto per la deduzione delle leggi del moto della particella, e quindi l'ipotesi del trasporto di Fermi ad esso equivalente, porta agli stessi risultati della teoria

(3) E. FERMI, « Rend. Acc. Lincei », *31*, 21 (1922); cfr. anche C. MØLLER, « The Theory of. Relativity », 2ª Ed. pp. 326, Oxford 1972.

(4) Si osservi che la definizione qui assunta per il trasporto di Fermi è un po' diversa da quella originale in (3) anche se praticamente equivalente. Da un punto di vista geometrico, mentre il trasporto parallelo di Levi-Civita di un vettore A^i è caratterizzato dalla equazione $\frac{DA^i}{Ds} = 0$, il trasporto di Fermi risulta caratterizzato dalla $\frac{D_F A^i}{D_F s} \equiv \frac{DA^i}{Ds} + \left(u^k \frac{Du^i}{Ds} - u^i \frac{Du^k}{Ds}\right) A_k = 0$ essendo le $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ i parametri di direzione della linea lungo la quale si effettua il trasporto.

unitaria di Stephenson e Kilmister [5] caratterizzata da una metrica omogenea in dx^i e ds dalla forma:

$$ds^2 + \frac{2e}{m_0} \Phi_i \, dx^i \, ds - \left(g_{ik} - \frac{e}{m_0} \Phi_i \Phi_k\right) dx^i \, dx^k = 0 \, .$$

In tale teoria le traiettorie della particella risultano le geodetiche di una particolare varietà finsleriana che ammette per metrica:

$$ds = (g_{ik} \, dx^i \, dx^k)^{1/2} + \frac{e}{m_0} \Phi_i \, dx^i \, .$$

Notiamo che anche nel caso di forze derivanti da un potenziale scalare φ le equazioni del moto di una particella potrebbero essere derivate come geodetiche di una varietà spazio-temporale descritta da un'opportuna metrica finsleriana.

3. APPLICAZIONE: MOTO DI UNA PARTICELLA SOTTO L'AZIONE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE E DI UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO

Come applicazione della formulazione sviluppata in queste Note, espliciteremo le equazioni del moto di una particella di carica e e massa a riposo m_0 in una regione limitata dello spazio nella quale il campo gravitazionale è uniforme di intensità G (diretto lungo l'asse z) e sotto l'azione di un campo elettrostatico generato da una carica Q posta in un punto fisso dello spazio.

Supponendo che i fenomeni elettrostatici siano talmente poco intensi da ritenere trascurabile l'alterazione da essi prodotti sulla metrica della regione in discorso, avremo che le equazioni del campo gravitazionale

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}$$

portano ai seguenti valori dei coefficienti (usando notazioni lievemente variate rispetto alle precedenti):

$$g_{00} = 1 - 2 \frac{Gz}{c^2} \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \qquad g_{ik} = 0 \quad (\text{se } i \neq k) \, ,$$

con $Gz/c^2 \ll 1$ per tutti i valori di z che vengono presi in considerazione, per cui:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - 2 \frac{Gz}{c^2}\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = a(z) \, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \, .$$

Il campo elettrico sarà caratterizzato da un potenziale Φ_i tale che:

$$\Phi_0 = V \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$$

(5) G. STEPHENSON and C. W. KILMISTER, «Nuovo Cimento», X, *3*, 230 (1953); cfr. A. LICHNEROVICZ, «Théories Rélativistes de la Gravitation et de l' Electromagnetisme», pp. 155, Paris 1955.

per cui le sole componenti del campo non nulle saranno:

$$E_x = F^{01} = -\frac{c^2}{a}\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = F^{02} = -\frac{c^2}{a}\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = F^{03} = -\frac{c^2}{a}\frac{\partial V}{\partial z}\,.$$

Il potenziale V, come conseguenza delle equazioni covarianti di Maxwell, risulta determinato dall'equazione:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c}\frac{d\ln(\sqrt{a}/c)}{dz}\frac{\partial V}{\partial z} = -\rho\frac{\sqrt{a}}{c}$$

ovverosia

$$\nabla^2 V + \frac{G}{c}\frac{\partial V}{\partial z} = -\left(1 - \frac{G}{c^2}z\right)\rho \tag{13}$$

essendo $\rho(x, y, z)$ la densità di carica elettrica.

Nel caso che la distribuzione di cariche si riduca a una carica puntiforme Q situata nell'origine delle coordinate, la (13) ha per soluzione [6]:

$$V = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2}\frac{z}{r}\right)$$

da cui:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{r}}{2c^2r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{\mathbf{G}}{2c^2r}\right).$$

Consideriamo ora il moto di una particella puntiforme di massa a riposo m_0 e carica e sotto l'azione combinata del campo gravitazionale e di quello elettrico. Varranno le equazioni (5) e cioè:

$$\frac{du^2}{ds} + \left\{\begin{matrix} i & k \\ & l \end{matrix}\right\} u^i u^k = \frac{e}{m_0} F^{li} u_i\,.$$

Con alcuni passaggi si può verificare che questa equazione equivale al seguente sistema in notazioni ordinarie:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c_g^2}}\right) = \frac{eQ}{4\pi}\left(\frac{x}{r^3} - \frac{G}{2c^2}\frac{zx}{r^3}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c_g^2}}\right) = \frac{eQ}{4\pi}\left(\frac{y}{r^3} - \frac{G}{2c^2}\frac{zy}{r^3}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c_g^2}}\right) = \frac{m_0 G}{\sqrt{1 - v^2/c_g^2}} + \frac{eQ}{4\pi}\left(\frac{z}{r^2} - \frac{Gz^2}{2c^2r^3} + \frac{G}{2c^2} - \frac{1}{r}\right)$$

in cui

$$c_g = c\left(1 - \frac{Gz}{c^2}\right)$$

indica la velocità della luce nel campo gravitazionale.

In assenza di gravitazione $(G = 0)$ le equazioni precedenti si riducono a quelle ben note della relatività ristretta per il moto di una particella di massa a riposo m_0 e carica e sotto l'azione del campo elettrico considerato.

(6) E. FERMI, « Nuovo Cimento », *22*, 176 (1921).