
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

TULLIO VALENT

**Sulla formulazione variazionale - espressa nello stress
- del problema dell'equilibrio dei corpi elastici con un
vincolo di appoggio unilaterale liscio. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 56 (1974), n.5, p. 729–737.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_5_729_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sulla formulazione variazionale — espressa nello stress — del problema dell'equilibrio dei corpi elastici con un vincolo di appoggio unilaterale liscio* (*). Nota I di TULLIO VALENT, presentata (**) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — We study the analytical problems connected with a variational formulation—expressed in terms of the stress—of the elastostatic problem when an unilateral supporting constraint without friction is present.

Such a formulation is compared with a variational formulation expressed in terms of the displacement.

This Nota I is the first section of the paper; the second section will appear in Nota II, fasc. n. 6, of this volume.

Proseguendo lo studio delle questioni analitiche connesse con la formulazione variazionale — *espressa nello stress* — del problema elastostatico in presenza di vincoli unilaterali, nel presente lavoro si considera una classe di stress « staticamente ammissibili » più ampia di quella considerata in un precedente lavoro ⁽¹⁾ e si perviene ad un teorema generale di esistenza e di unicità nello stress, da cui discende un teorema di esistenza nello spostamento.

Si confronta il « problema unilaterale » nello stress (qui studiato) con quello nello spostamento (« problema di Signorini »).

Si fa vedere come l'assunzione dello stress — anziché dello spostamento — quale incognita fondamentale permette, essenzialmente, di evitare ipotesi di natura analitica, non sempre fisicamente accettabili, sulle funzioni che intervengono nelle equazioni costitutive. [Vedi Osservazione 1].

I. PRELIMINARI

Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbf{R}^n$, $\partial\Omega$ la sua frontiera, Σ una parte di $\partial\Omega$, $x = (x_i)$ il punto generico di $\bar{\Omega}$ (chiusura di Ω), $dx = dx_1 \cdots dx_n$, $\nu = (\nu_i)$ il versore della normale « interna » in ogni punto regolare di $\partial\Omega$.

Si indicherà con $L^2_{\mathbf{R}}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni reali di quadrato sommabile secondo Lebesgue in Ω ; con $L^2_{\mathbf{R}}(\partial\Omega)$, $L^2_{\mathbf{R}}(\Sigma)$, $L^2_{\mathbf{R}}(\partial\Omega - \Sigma)$ gli insiemi delle funzioni reali di quadrato sommabile per la misura ipersuperficiale di Lebesgue ⁽²⁾ rispettivamente su $\partial\Omega$, su Σ e su $\partial\Omega - \Sigma$; con $C^1_{\mathbf{R}}(\bar{\Omega})$ l'insieme delle funzioni reali definite in $\bar{\Omega}$ e ivi continue con le derivate parziali prime.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 28 maggio 1974.

(1) T. VALENT, *Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni*, « Rend. Sem. Mat. », 50, Padova (1973).

(2) Naturalmente, è sott'inteso che $\partial\Omega$, Σ e $\partial\Omega - \Sigma$ siano tali da poter definire su di essi la misura ipersuperficiale di Lebesgue.

$L^2_{\mathbf{R}^n}(\Omega)$, $L^2_{\mathbf{R}^n}(\partial\Omega)$, $L^2_{\mathbf{R}^n}(\Sigma)$, $L^2_{\mathbf{R}^n}(\partial\Omega - \Sigma)$, $C^1_{\mathbf{R}^n}(\overline{\Omega})$ denoteranno gli insiemi delle funzioni (vettoriali) a valori in $\mathbf{R}^n$ di cui le funzioni componenti appartengono rispettivamente a $L^2_{\mathbf{R}}(\Omega)$, $L^2_{\mathbf{R}}(\partial\Omega)$, $L^2_{\mathbf{R}}(\Sigma)$, $L^2_{\mathbf{R}}(\partial\Omega - \Sigma)$, $C^1_{\mathbf{R}}(\overline{\Omega})$.

S denoterà lo spazio di Hilbert delle matrici quadrate simmetriche di ordine n su $L^2_{\mathbf{R}}(\Omega)$ con il prodotto scalare ⁽³⁾

$$\sigma, \tau \rightarrow (\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \quad \sigma, \tau \in S;$$

sarà allora

$$\|\tau\|_S^2 = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \tau_{ij}^2 dx.$$

H denoterà lo spazio di Hilbert che si ottiene per completamento funzionale di $C^1_{\mathbf{R}^n}(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma

$$v \rightarrow \|v\|_H = \left(\|v\|_{L^2_{\mathbf{R}^n}(\Omega)}^2 + \|\varepsilon(v)\|_S^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_i \int_{\Omega} v_i^2 dx + \sum_{i,j} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v)^2 dx \right)^{1/2},$$

ove

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad , \quad \left(v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad , \quad \varepsilon(v) = (\varepsilon_{ij}(v))_{i,j=1,\dots,n}.$$

I vettori di H appartengono a $L^2_{\mathbf{R}^n}(\Omega)$ e, per essi è definito ⁽⁴⁾ - nel senso forte di Friedrichs - l'operatore differenziale ε risultando $\varepsilon(v) \in S$.

Sia $\mathcal{R}$ l'insieme di vettori (di H) del tipo $x \rightarrow c + \gamma x$, ove $c \in \mathbf{R}^n$ e γ è una matrice quadrata di ordine n su $\mathbf{R}$ emisimmetrica (vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi) e sia $\mathcal{E}$ l'insieme dei vettori e (di H) tali che

$$\int_{\Omega} e_i dx = 0 \quad , \quad \int_{\Omega} (e_i x_j - e_j x_i) dx = 0$$

(vettori equilibrati in Ω).

$\mathcal{R}$ è palesemente il nucleo dell'operatore ε ; in quanto sottospazio di H di dimensione finita, $\mathcal{R}$ è chiuso in H .

Poichè - come facilmente si verifica ⁽⁵⁾ - $\mathcal{E}$ è il sottospazio di H ortogonale a $\mathcal{R}$, H è somma diretta topologica di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{R}$: $H = \mathcal{E} \oplus \mathcal{R}$.

⁽³⁾ È sott'inteso il segno di somma su ogni indice ripetuto.

⁽⁴⁾ $v \in H$ se e solo se esistono $\alpha = (\alpha_{ij}) \in S$ e qualche successione $\{v^k\}$ in $C^1_{\mathbf{R}^n}(\overline{\Omega})$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v_i^k - v_i)^2 dx = 0 \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [\varepsilon_{ij}(v^k) - \alpha_{ij}]^2 dx = 0, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

α risulta indipendente da $\{v^k\}$; ponendo allora $\varepsilon_{ij}(v) = \alpha_{ij}$ e $\varepsilon(v) = \alpha$, l'operatore differenziale ε viene esteso ad H .

⁽⁵⁾ Cfr. T. VALENT, *Una decomposizione di uno spazio hilbertiano avente interesse e significato in Meccanica*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 52 (febbraio 1972), in cui, a p. 183, c'è la verifica di un fatto analogo che si può trasportare, inalterata, al caso nostro.

Ogni $v \in H$ può dunque scriversi in uno e un sol modo nella forma $v = e_v + r_v$, con $e_v \in \mathcal{E}$, $r_v \in \mathcal{R}$; diremo che e_v è la *parte equilibrata in Ω di v* .

Facciamo l'ipotesi che Ω sia tale che sussistano le seguenti maggiorazioni:

$$(1) \quad \inf_{r \in \mathcal{R}} \|v + r\|_{L^2_{\mathbf{R}^n}(\Omega)} = \|e_v\|_{L^2_{\mathbf{R}^n}(\Omega)} \leq k_1 \|\varepsilon(v)\|_S$$

$$(2) \quad \|v\|_{L^2_{\mathbf{R}^n}(\partial\Omega)} = \left(\sum_1^n \int_{\partial\Omega} v_i^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq k_2 \|v\|_H,$$

per ogni $v \in C^1_{\mathbf{R}^n}(\overline{\Omega})$, essendo k_1, k_2 due numeri positivi dipendenti soltanto da Ω ; e_v è la parte equilibrata in Ω di v .

Le (1), (2) sussistono per gli aperti Ω che normalmente interessano le applicazioni e lasciano alla frontiera di Ω larga generalità; esse sono senz'altro vere, ad esempio, se Ω è un « campo propriamente regolare », secondo la definizione data da G. Fichera ⁽⁶⁾.

La (2) permette di definire la traccia su $\partial\Omega$ di ogni vettore $v \in H$.

Infatti, in virtù di (2), l'applicazione lineare $v \rightarrow v|_{\partial\Omega}$ di $C^1_{\mathbf{R}^n}(\overline{\Omega})$ in $L^2_{\mathbf{R}^n}(\partial\Omega)$ è continua se la norma su $C^1_{\mathbf{R}^n}(\overline{\Omega})$ è $\|\cdot\|_H$; pertanto essa ha un (unico) prolungamento continuo ad H che definisce la traccia su $\partial\Omega$ di ogni elemento di H .

Poniamo $\mathcal{R}^* = \{r \in \mathcal{R} : r_i v_i = 0 \text{ quasi ovunque su } \Sigma\}$; $\mathcal{R}^*$ è, in altri termini, l'insieme dei vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi « tangenti » a Σ .

$\mathcal{R}^*$ può contenere soltanto il vettore nullo; in ogni caso esso è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{R}$ e quindi di H .

Indicheremo con P^* il proiettore di H su $\mathcal{R}^*$.

Sia $V = \{v \in H : v_i v_i \geq 0 \text{ quasi ovunque su } \Sigma\}$; V è, palesemente, un cono convesso chiuso di H .

Siano assegnati $f \in L^2_{\mathbf{R}^n}(\Omega)$, $g \in L^2_{\mathbf{R}^n}(\partial\Omega - \Sigma)$ tali che, posto

$$F(v) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i v_i d\sigma \quad \forall v \in H,$$

risulti

$$(3) \quad F(r) \leq 0 \quad \forall r \in \mathcal{R} \cap V,$$

il segno di uguaglianza avendosi se e solo se $r \in \mathcal{R}^*$.

(6) Cfr. G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, «Mem. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 7 (5) (1964), 109-115.

Sia

$$\Gamma = \{ \tau \in S : (\tau, \varepsilon(v)) + F(v) \leq 0 \quad \forall v \in V \} = \\ = \left\{ \tau \in S : \int_{\Omega} \tau_{ij} \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i v_i d\sigma \leq 0 \quad \forall v \in V \right\}$$

Γ è un convesso chiuso ⁽⁷⁾ di S .

Siano inoltre assegnate le funzioni a_{ijhk} , ($i, j, h, k = 1, \dots, n$), definite in Ω , ivi misurabili e quasi ovunque limitate, tali che $a_{ijhk} = a_{jikh} = a_{hhij}$ e che, posto

$$a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} a_{ijhk} \sigma_{ij} \tau_{hk} dx \quad \forall \sigma, \tau \in S,$$

la forma bilineare simmetrica a su S sia definita positiva ⁽⁸⁾: cioè risulti $a(\tau, \tau) > 0 \quad \forall \tau \in S, \tau \neq 0$.

Poniamo

$$\mathcal{F}(\tau) = \frac{1}{2} a(\tau, \tau) \quad \forall \tau \in S.$$

Il funzionale reale $\mathcal{F}$, definito in S , è continuo, al pari della forma bilineare a , come immediatamente si verifica tenendo presente che le a_{ijhk} sono misurabili e quasi ovunque limitate.

2. PRECISAZIONE DEL PROBLEMA ANALITICO TRADUCENTE QUELLO ELASTOSTATICO

Posto $n = 3$, Ω rappresenti la configurazione di riferimento - che supponiamo di equilibrio naturale - di un corpo elastico soggetto a un vincolo di appoggio unilaterale liscio, di cui si voglia studiare l'equilibrio isoterma nel caso di piccole deformazioni.

Se Σ è la parte di $\partial\Omega$ (eventualmente coincidente con $\partial\Omega$) che, nella configurazione di riferimento, si trova a contatto dell'appoggio, f la densità di forza di massa, g la densità della forza superficiale assegnata su $\partial\Omega - \Sigma$ (se $\partial\Omega - \Sigma$ ha misura positiva), Γ rappresenta l'insieme degli stress τ , con componenti cartesiane ortogonali τ_{ij} di quadrato sommabile in Ω , che soddisfano

(7) Se $\tau \in \bar{\Gamma}$ e $\{\tau^k\}$ è una successione in Γ convergente a τ , si ha $(\tau^k, \varepsilon(v)) + F(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$ qualunque sia il numero naturale k , nonché $\lim_{k \rightarrow \infty} (\tau^k, \varepsilon(v)) = (\tau, \varepsilon(v)) \quad \forall v \in V$, essendo $\varepsilon(v) \in S$; se ne deduce $(\tau, \varepsilon(v)) + F(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$, cioè $\tau \in \Gamma$.

(8) Ci si rende conto facilmente che supporre a definita positiva equivale a supporre che, quasi ovunque in Ω , risulti $a_{ijhk}(x) \gamma_{ij} \gamma_{hk} > 0$ per ogni matrice simmetrica $\gamma = (\gamma_{rs}) \neq 0$ di ordine n su $\mathbf{R}$.

Osserviamo che la definizione della forma bilineare a su S ha senso perché, avendo supposto le a_{ijhk} misurabili e quasi ovunque limitate in Ω , la funzione $a_{ijhk} \sigma_{ij} \tau_{hk}$ è integrabile in Ω qualunque siano $\sigma, \tau \in S$.

al principio dei lavori virtuali, V rappresentando l'insieme degli spostamenti virtuali (appartenenti allo spazio H).

Le $(\tau, \varepsilon(v)) + F(v) \leq 0$, scritte per ogni $v \in V$ – traducenti, chiaramente, il principio dei lavori virtuali – costituiscono una formulazione *debole* del problema differenziale seguente:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tau_{ij,j} = f_i & \text{in } \Omega \\ \tau_{ij} \nu_j = g_i & \text{su } \partial\Omega - \Sigma \\ \tau_{ij} \nu_j t_i = 0 \quad \forall t \text{ tangente a } \Sigma \\ \tau_{ij} \nu_i \nu_j \geq 0. \end{array} \right\} \text{ su } \Sigma$$

Si noti che agli stress τ di Γ – che potremmo chiamare *staticamente ammissibili* – non solo non si richiede di essere derivabili nel senso ordinario (fatto non richiesto, peraltro, dal problema fisico), ma non si impone nemmeno che ad essi corrisponda una reazione vincolare esprimibile mediante una funzione di punto, potendo invece l'intensità della reazione del vincolo essere esprimibile da una misura di Borel non assolutamente continua rispetto alla misura superficiale di Lebesgue ⁽⁹⁾.

Se $\tau \in \Gamma$, $\tau_{ij} \in C^1_R(\bar{\Omega})$ e Ω è sufficientemente regolare, si riconosce che τ verifica effettivamente le (4).

In ogni caso ogni $\tau \in \Gamma$ verifica in Ω le $\tau_{ij,j} = f_i$, la derivazione essendo intesa nel senso delle distribuzioni.

La legge costitutiva del corpo elastico sia espressa da

$$(5) \quad \varepsilon_{ij}(u) = -a_{ijhk} \sigma_{hk}, \quad (u \in H, \sigma \in \Gamma);$$

$\mathcal{F}(\sigma)$ rappresenta, allora, l'energia potenziale elastica in corrispondenza dello stress σ .

Affinchè $\sigma \in \Gamma$ sia soluzione del problema elastostatico deve esistere $u \in V$ legato a σ da (5): cioè, non solo σ dev'essere « congruente » (in senso generalizzato), ma occorre che, degli spostamenti $u \in H$ che si ottengono da σ tramite (5), (almeno) uno appartenga al convesso V .

Si osservi, inoltre, che – almeno quando $\sigma_{ij} \in C^1_R(\bar{\Omega})$ – il vincolo di appoggio unilaterale (con possibilità, quindi, di distacco) liscio impone che si abbia $u_i \nu_i = 0$ sulla parte di Σ ove risulta $\sigma_{ij} \nu_i \nu_j > 0$ e ciò è equivalente, se Ω è sufficientemente regolare, alla condizione integrale

$$(6) \quad (\sigma, \varepsilon(u)) + F(u) = 0.$$

(9) In T. VALENT, lavoro citato in (1) ho considerato un insieme convesso di stress staticamente ammissibili meno ampio di questo; neppure in quel lavoro si esigeva che lo stress fosse derivabile nel senso ordinario, però si prendevano in considerazione solo quegli stress cui corrisponde una reazione vincolare esprimibile da una funzione di punto (di quadrato sommabile).

In un prossimo lavoro si vedrà più chiaramente in quale senso le $(\tau, \varepsilon(v)) + F(v) \leq 0$ $\forall v \in V$ costituiscono una formulazione debole delle (4).

Infatti ⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned}
 (\sigma, \varepsilon(u)) + F(u) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) dx + \int_{\Omega} f_i u_i dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i u_i d\sigma = \\
 &= - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij,j} u_i dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \nu_j u_i d\sigma + \int_{\Omega} f_i u_i dx + \\
 &+ \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i u_i d\sigma = \int_{\Omega} (f_i - \sigma_{ij,j}) u_i dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} (g_i - \sigma_{ij} \nu_j) u_i d\sigma + \\
 &+ \int_{\Sigma} (\sigma_{ij} \nu_i \nu_j) (\nu_h u_h) d\sigma = \int_{\Sigma} (\sigma_{ij} \nu_i \nu_j) (\nu_h u_h) d\sigma,
 \end{aligned}$$

d'onde la conclusione, essendo $\sigma_{ij} \nu_i \nu_j \geq 0$ e $\nu_h u_h \geq 0$ quasi ovunque su Σ .

Conveniamo di chiamare *reale* uno stress $\sigma \in \Gamma$ se esiste $u \in V$ tale che sussistano (5), (6).

In questo lavoro [costituito della presente Nota I e di una successiva Nota II] proveremo che:

(a) Γ non è vuoto;

(b) Condizione necessaria e sufficiente affinché uno stress σ di Γ sia *reale* è che σ renda minimo $\mathcal{F}$ in Γ ;

(c) $\mathcal{F}$ ha senz'altro minimo in Γ se è soddisfatta una certa condizione sulle funzioni a_{ijhk} .

(10) Se $\sigma_{ij} \in C^1_{\mathbf{R}^n}(\bar{\Omega})$ e $u \in H$, sussiste la formula (di Green)

$$(*) \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) dx = - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \nu_j u_i d\sigma.$$

Infatti, se $\{u^k\}$ è una successione in $C^1_{\mathbf{R}^n}(\bar{\Omega})$ convergente a u secondo la norma di H , si ha, in base alla maggiorazione (2), al fatto che $\sigma_{ij} \in L^2_{\mathbf{R}}(\Omega)$, $\sigma_{ij,j} \in L^2_{\mathbf{R}}(\Omega)$, $\sigma_{ij} \nu_j \in L^2_{\mathbf{R}}(\partial\Omega)$, e che la convergenza in norma implica la convergenza debole,

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u^k) dx &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) dx \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^k dx &= \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i dx \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \nu_j u_i^k d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \nu_j u_i d\sigma;
 \end{aligned}$$

poiché, d'altra parte, essendo $u^k \in C^1_{\mathbf{R}^n}(\bar{\Omega})$, risulta

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u^k) dx = - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^k dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \nu_j u_i^k d\sigma,$$

se ne deduce il sussistere di (*).

Avremo così – per il problema elastostatico – un teorema di esistenza e di unicità, espresso nello stress, in S , a cui corrisponde un teorema di esistenza, espresso nello spostamento, in H .

Mostreremo, inoltre, che:

(d') Se le funzioni b_{ijhk} , legate ⁽¹¹⁾ alle a_{ijhk} dalle relazioni $a_{ijrs} b_{ijhk} = 1/2 (\delta_{rh} \delta_{sk} + \delta_{rk} \delta_{sh})$ (essendo δ_{ij} il simbolo di Kronecker), sono – al pari delle a_{ijhk} – limitate quasi ovunque in Ω , il problema unilaterale consistente nel minimizzare $\mathcal{F}$ in Γ è «equivalente» a quello di minimizzare in V il funzionale reale che dà l'energia potenziale in funzione dello spostamento.

OSSERVAZIONE 1. Se b_{ijhk} sono le funzioni legate alle a_{ijhk} dalle relazioni $a_{ijrs} b_{ijhk} = 1/2 (\delta_{rh} \delta_{sk} + \delta_{rk} \delta_{sh})$, da (5) si ottiene

$$\sigma_{ij} = - b_{ijhk} \varepsilon_{hk}(u).$$

Normalmente si fa l'ipotesi che le funzioni b_{ijhk} siano limitate (quasi ovunque) in Ω : tale ipotesi è – in effetti – imposta da esigenze analitiche quando viene assunto lo spostamento quale incognita fondamentale del problema.

Qualora, invece, la formulazione variazionale del problema elastostatico viene espressa nello stress (come nel presente lavoro), non è necessaria ⁽¹²⁾ la limitatezza delle funzioni b_{ijhk} nè a livello di formulazione del problema né, come si vedrà, per il sussistere di alcune proprietà fondamentali – quale, ad esempio, la proprietà (b) enunciata sopra – anche se, come si vedrà, si riesce a dimostrare facilmente che $\mathcal{F}$ ha minimo in Γ ammettendo una condizione sulle a_{ijhk} che implica la limitatezza quasi ovunque in Ω delle b_{ijhk} .

Si osservi che l'ipotesi di limitatezza (quasi ovunque) per le funzioni a_{ijhk} – che noi qui ammettiamo – appare più in conformità con il fatto fisico, che il problema analitico vuole tradurre, dell'ipotesi della limitatezza (quasi ovunque) delle b_{ijhk} per il motivo che – nel caso di piccole deformazioni – lo stato elastico è da considerarsi più vicino allo stato rigido che a quello della materia disgregata.

Supponendo le b_{ijhk} limitate in Ω non si potrebbe considerare, per esempio, il caso di un corpo elastico Ω che, al tendere di x (in qualche modo) a un punto della frontiera di Ω , tende a diventare rigido; questo caso, invece, è compatibile con l'ipotesi della limitatezza in Ω delle a_{ijhk} .

3. Γ NON È VUOTO

Torniamo al caso generale che n sia un numero naturale qualunque.

La condizione (3) è chiaramente necessaria perchè Γ non sia vuoto: si pensi, infatti, che $\varepsilon(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{R}$.

(11) Le funzioni b_{ijhk} sono definite quasi ovunque in Ω , a causa dell'ipotesi $a(\tau, \tau) > 0 \quad \forall \tau \in S, \tau \neq 0$. [Cfr. (8)].

(12) Almeno quando non si affrontano problemi di regolarizzazione.

Dimostreremo che se (come abbiamo supposto fin dall'inizio) il segno di uguaglianza in (3) si verifica se e solo se $r \in \mathcal{R}^*$, la condizione diventa sufficiente. Premettiamo il seguente

LEMMA 1. *L'insieme numerico $\{F(v) : v \in V, \|\varepsilon(v)\|_S \leq 1\}$ è superiormente limitato* (13).

Per convincersene si ammetta, per assurdo, che tale insieme non sia superiormente limitato: allora esiste una successione $\{v^k\}$ in V tale che $\|\varepsilon(v^k)\|_S \leq 1$ e che

$$(7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F(v^k) = +\infty.$$

Possiamo senz'altro supporre $P^*(v^k) = 0$, dato che $F(r) = 0 \quad \forall r \in \mathcal{R}^*$.

La (7) implica, a causa della continuità di F in H ,

$$(8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v^k\|_H = +\infty$$

e quest'ultima, scritto v^k nella forma $e^k + r^k$, con $e^k \in \mathcal{E}$, $r^k \in \mathcal{R}$, implica

$$(9) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^k}{\|v^k\|_H} = 0,$$

perchè, essendo $\|\varepsilon(v^k)\|_S \leq 1$, la successione $\{\|e^k\|_H\}$ è limitata.

Posto (per ogni k sufficientemente grande) $w^k = v^k / \|v^k\|_H$, si ha $\|w^k\|_H = 1$; la successione $\{w^k\}$, essendo limitata in norma, ha qualche sottosuccessione, che, per semplicità, indicheremo ancora con $\{w^k\}$ convergente debolmente in H .

Poichè $w^k = e^k / \|v^k\|_H + r^k / \|v^k\|_H$, da (9) e dal fatto che - essendo $\mathcal{R}$ di dimensione finita - in $\mathcal{R}$ la convergenza debole di una successione coincide con la convergenza in norma, si ha (14)

$$(10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} w^k = \lim_{k \rightarrow \infty} r^k / \|v^k\|_H = r \in \mathcal{R} \cap V.$$

Per la continuità di P^* e della norma si ha $P^*(r) = 0$, $\|r\|_H = 1$. Se $\mathcal{R} \cap V = \mathcal{R}^*$, $P^*(r) = 0$ implica $r = 0$, che è in contraddizione con $\|r\|_H = 1$.

Sia allora $\mathcal{R} \cap V \neq \mathcal{R}^*$.

Essendo F lineare e continua ad essendo, a causa dell'ipotesi fatta su F , $F(r) < 0$, da (10) segue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(v^k) / \|v^k\|_H = F(r) < 0;$$

(13) Si noti che, se Γ non è vuoto, l'insieme $\{F(v) : v \in V, \|\varepsilon(v)\|_S \leq 1\}$ è necessariamente superiormente limitato.

Infatti, dato $\tau \in S$, esiste un numero positivo c tale che $|\langle \tau, \varepsilon(v) \rangle| \leq c \|\varepsilon(v)\|_S \quad \forall v \in H$, d'onde $|\langle \tau, \varepsilon(v) \rangle| \leq c \quad \forall v \in H$ tale che $\|\varepsilon(v)\|_S \leq 1$; pertanto, se $\langle \tau, \varepsilon(v) \rangle + F(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$, si ha $-F(v) \geq \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle \geq -c$, ossia $F(v) \leq c \quad \forall v \in V$ tale che $\|\varepsilon(v)\|_S \leq 1$.

(14) Poichè $\mathcal{R}$ e V sono chiusi, $r^k / \|v^k\|_H \in \mathcal{R} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} r^k / \|v^k\|_H \in \mathcal{R}$, e $w^k \in V \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w^k \in V$.

ciò contraddice (7), perchè (7) implica $F(v^k) > 0$ per ogni intero k maggiore di un conveniente numero positivo.

Dunque (7) non può essere vera e così il Lemma 1 resta giustificato. Dimostriamo ora che

I. Γ non è vuoto.

Dimostrare che Γ non è vuoto equivale, evidentemente, a dimostrare che esiste $\tau \in S$ tale che $(\tau, \xi) \leq G(\xi) \quad \forall \xi \in \varepsilon(V)$, essendo $G(\xi) = \inf \{ -F(v) : v \in \varepsilon^{-1}(\xi) \cap V \}$.

In virtù di (3) risulta $G(\xi) > -\infty \quad \forall \xi \in \varepsilon(V)$; dunque G è un'applicazione di $\varepsilon(V)$ in $\mathbf{R}$.

Per il Lemma 1 esiste una costante positiva c tale che $G(\xi) \geq -c \|\xi\|_S \quad \forall \xi \in \varepsilon(V)$ con $\|\xi\|_S = 1$; anzi, poichè — come si verifica immediatamente — G è positivamente omogenea [cioè $G(t\xi) = tG(\xi)$ per ogni reale $t \geq 0$ e per ogni $\xi \in \varepsilon(V)$], risulta

$$(11) \quad G(\xi) \geq -c \|\xi\|_S, \quad \forall \xi \in \varepsilon(V).$$

Non è difficile verificare che G è anche sub-additiva [cioè che $G(\xi_1 + \xi_2) \leq G(\xi_1) + G(\xi_2) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \varepsilon(V)$] e che, quindi, l'insieme

$$E_1 = \{(\xi, t) \in \varepsilon(V) \times \mathbf{R} : t \geq G(\xi)\}$$

è un cono convesso di $S \times \mathbf{R}$.

Posto

$$E_2 = \{(\xi, t) \in S \times \mathbf{R} : t \leq -c \|\xi\|_S\},$$

E_2 è un cono convesso di $S \times \mathbf{R}$ dotato di punti interni; inoltre, a causa di (11), E_1 non contiene alcun punto interno di E_2 .

Di conseguenza — in virtù di un teorema di separazione degli insiemi convessi di uno spazio vettoriale topologico ⁽¹⁵⁾ — esiste un iperpiano omogeneo chiuso di $S \times \mathbf{R}$ che separa E_1 da E_2 ; esistono cioè ⁽¹⁶⁾ $\tau_0 \in S$, $(\tau_0 \neq 0)$ e $t_0 \in \mathbf{R}$ tali che

$$(12) \quad (\tau_0, \xi) + t_0 t \leq 0 \quad \forall (\xi, t) \in E_1$$

$$(13) \quad (\tau_0, \xi) + t_0 t \geq 0 \quad \forall (\xi, t) \in E_2.$$

Da (12), (13) si deduce facilmente $t_0 < 0$.

(12), allora, porge $(\tau_0, \xi) \leq -t_0 t \quad \forall t \geq G(\xi)$ e quindi, in particolare, $(\tau_0, \xi) \leq -t_0 G(\xi)$, ossia — posto $\tau = -\tau_0/t_0$ — $(\tau, \xi) \leq G(\xi)$; come si voleva dimostrare.

(15) «Se E_1, E_2 sono due convessi di uno spazio vettoriale topologico L tali che E_2 è dotato di punti interni e E_1 non contiene punti di E_2 interni a E_2 , esiste un iperpiano chiuso di L che separa E_1 da E_2 ». Cfr., ad esempio J. L. KELLY e I. NAMIOKA, *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand Company (1963), p. 118.

(16) Ogni forma lineare continua su $S \times \mathbf{R}$ è del tipo $(\xi, t) \rightarrow (\tau_0, \xi) + t_0 t$, ove $\tau_0 \in S$ e $t_0 \in \mathbf{R}$.