Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gabriele Korchmaros

Poligoni affin-regolari dei piani di Galois d'ordine dispari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.5, p. 690–697.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_5_690_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Geometrie finite. — *Poligoni affin-regolari dei piani di Galois d'ordine dispari.* Nota di GABRIELE KORCHMÁROS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In an affine plane on $GF(q)$, $q = p^r$ odd, certain so-called affine regular n-gones are introduced and studied; they exist if, and only if, n divides either $q+1$ or $q-1$, or if $n = p$.

È ben noto che le geometrie finite intervengono in varie scienze applicate, per esempio nella statistica [6], nella teoria dell'informazione [6] ed in astronomia ([3], [4]). Dal punto di vista astronomico, l'interesse è principalmente legato allo studio della possibilità di una descrizione dello spazio fisico mediante una geometria finita. Nell'ambito dello studio di tale possibilità, G. Tallini ha osservato che certe nozioni con certe proprietà del piano euclideo – come la norma, la distanza, l'ortogonalità, il teorema di Pitagora, la circonferenza, i movimenti, ecc. – possono venir trasportate ad un piano affine di Galois [5]. Recentemente E. G. Beltrametti, in collaborazione con G. Tallini, ha esaminato alcune proprietà della teoria dinamica costruita su di una geometria finita [2].

La presente Nota arreca ulteriori contributi in questa direzione. A partire dai movimenti di un piano di Galois d'ordine dispari si introduce una nuova nozione, quella qui chiamata col nome «poligono affin-regolare», di cui vengono esaminate talune proprietà elementari.

Desidero infine ringraziare il mio prof. F. Kárteszi che mi è stato molto utile con i suoi consigli.

1. Sia Ω un fissato elemento non quadrato di un campo di Galois F d'ordine $q = p^r, q$ dispari. Chiamasi *piano euclideo* su F la coppia costituita dal piano affine $A_{2,q}$ su F e dalla applicazione

$$\mathbf{N} : (P_1 , P_2) \in A_{2,q} \times A_{2,q} \to \mathbf{N}(P_1 , P_2) \in F$$

definita, in un riferimento affine prefissato su $A_{2,q}$, da

$$\mathbf{N}(P_1 , P_2) = (x_1 - x_2)^2 - \vartheta (y_1 - y_2)^2 \quad ; \quad P_1 = (x_1 , y_1) , P_2 = (x_2 , y_2).$$

Un piano euclideo su F lo si continuerà a denotare con $A_{2,q}$. L'elemento $\mathbf{N}(P_1 , P_2)$ di F prenderà il nome di *norma* della coppia di punti P_1, P_2 o del punto P_2 da P_1.

Definiscesi poi *circonferenza* di un piano euclideo $A_{2,q}$ di centro un punto $C = (x_0 , y_0)$ e norma h ($\in$ F) il luogo dei punti di $A_{2,q}$ aventi norma ha da C.

(*) Nella seduta del 28 maggio 1974.

Una circonferenza di centro (x_0, y_0) e norma h ha dunque equazione

$$(x - x_0)^2 - \vartheta (y - y_0)^2 = h . \tag{1}$$

Se $h = 0$, la circonferenza (1) si riduce al solo punto (x_0, y_0). In seguito supporremo sempre $h \neq 0$; in questo caso una circonferenza possiede sempre $q + 1$ punti ([5], p. 11). La *tangente* della (1) in un suo punto $P_1 = (x_1, y_1)$ risulta la retta d'equazione

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - \vartheta (y - y_0)(y_1 - y_0) = h .$$

Chiamasi *movimento* di un piano euclideo $A_{2,q}$ una affinità di $A_{2,q}$ che conserva la norma (cioè tale che, per ogni P_1, P_2 di $A_{2,q}$ risulta $\mathbf{N}(P_1, P_2) = \mathbf{N}(P_1', P_2')$, ove P_1', P_2' sono le immagini di P_1, P_2 nell'affinità). Siccome l'indentità, l'inverso di un movimento ed il prodotto di due movimenti sono movimenti, si ha che l'insieme dei movimenti rispetto al prodotto operatorio è un *gruppo*, M_q, sottogruppo di quello affine ([5], p. 12). Si dimostra facilmente che le equazioni di un qualsiasi movimento di $A_{2,q}$ sono date da

$$x' = \lambda x \pm \mu y + a_1 \quad , \quad y' = \mu x \pm \vartheta\lambda y + a_2 , \tag{2}$$

ove vanno presi simultaneamente i segni superiori o quelli inferiori e λ, μ sono due qualunque elementi di F soddisfacenti alla

$$\lambda^2 - \vartheta\mu^2 = 1 \tag{3}$$

([5], p. 12). Il determinante, Δ, dei coefficienti di un movimento risulta dato, in forza della (3), da: $\Delta = \pm 1$, a seconda che nella (2) si prendano i segni superiori o inferiori. I movimenti si dividono perciò in diretti od inversi secondochè $\Delta = 1$ o $\Delta = -1$, e si può agevolmente verificare che essi sono in numero di $2(q + 1) q^2$; precisamente: $(q + 1) q^2$ diretti, che costituiscono un sottogruppo M_q^+ di M_q, e altrettanti inversi, cioè:

$$|M_q| = 2(q + 1) q^2 \quad , \quad |M_q^+| = (q + 1) q^2 .$$

Ponendo nella (2) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, al variare di λ e μ si ottiene il gruppo N_q di quei movimenti che fissano l'origine (0, 0) e la circonferenza di centro l'origine e norma 1 – che verrà denotata con Γ. Si osservi che tra tali movimenti si trovano le simmetrie (oblique) aventi come assi le rette passanti per l'origine, ed i loro prodotti due a due, che sono le rotazioni di centro l'origine. Ne segue senz'altro che tali rotazioni formano un sottogruppo N_q^+ d'ordine $q + 1$ di N_q. È immediato verificare che la corrispondenza τ, tra N_q^+ ed il gruppo moltiplicativo dell'ampliamento quadratico H di F mediante $\sqrt{\vartheta}$, così definita:

$$\lambda : \begin{cases} x' = \lambda x + \mu y \\ y' = \mu x + \vartheta\lambda y \end{cases} \in N_q^+ \to \lambda + \sqrt{\vartheta}\mu \, (H \setminus \{0\}) ,$$

è un epimorfismo. Pertanto, analogamente al caso classico, N_q^+ è ciclico, ossia N_q risulta diedrale.

È noto che una permutazione ciclica di n punti distinti di un piano qualsiasi prende il nome n–agono (non–degenere), ed esso può essere rappresentato con $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$, dove $P_i = \varphi^i(P)$ per un arbitrario vertice P prefissato del suddetto n–agono, dove φ è la suddetta permutazione.

TEOREMA I. *Ogni* $(q+1)$*–agono* $P_0 P_1 \cdots P_q$ *inscritto nella circonferenza di centro l'origine e norma* 1, *che viene indotto da un generatore* ρ *di* N_q^+, *ammette le seguenti proprietà: per ogni* j $(0 \leq j \leq q)$ *valgono le*

$$P_j P_{j+1} \parallel P_{j-i} P_{j+1+i} \qquad (i = 0, 1, \cdots [(q-3)/2]), \tag{4}$$

$$P_{j-1} P_{j+1} \parallel P_{j-i} P_{j+i} \qquad (i = 1, 2, \cdots [(q-3)/2]), \tag{5}$$

ove gli indici si intendono considerati (com'è lecito) modulo $q+1$.

Dimostrazione. Per verificare la (4), si consideri quella simmetria ψ di N_q che muta P_j in P_{j+1}. Si vede allora che

$$\psi(P_{j-i}) = \psi \circ \rho^{j-i}(P) = \psi \circ \rho^{-i}\{\rho^j(P)\} = \rho^i \circ \psi\{\rho^j(P)\} =$$
$$= \rho^j \circ \psi(P_j) = \rho^i(P_{j+i}) = \rho^i \circ \rho^{j+1}(P) = \rho^{i+j+1}(P) = P_{i+j+1},$$

sicché

$$P_j P_{j+1} \parallel P_{j-i} P_{j+i+1}.$$

In modo del tutto analogo si prova la (5).

Si osservi che, come immediata conseguenza della transitività del parallelismo di un piano affine (4) e (5) sono equivalenti alle:

$$P_j P_{j+1} \parallel P_{j-1} P_{j+2} \parallel \cdots \parallel P_{j-\left[\frac{q-1}{2}\right]} P_{j+1+\left[\frac{q-1}{2}\right]}, \tag{6}$$

$$P_{j-1} P_{j+1} \parallel P_{j-2} P_{j+2} \parallel \cdots \parallel P_{j-\left[\frac{q-1}{2}\right]} P_{j+\left[\frac{q-1}{2}\right]}, \tag{7}$$

ove gli indici si intendono sempre considerati modulo $q+1$.

Ricordiamo che l'immagine affine di un n–agono regolare (o regolare stellato) nel piano euclideo prende il nome n–agono affin–regolare. È noto che un n–agono $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ risulta affin–regolare se, e soltanto se, possiede gli stessi tipi di parallelismi considerati nelle (6) e (7), cioè se soddisfa alle seguenti proprietà [3]:

$$R_j R_{j+1} \parallel R_{j-1} R_{j+2} \parallel \cdots \parallel R_{j-\left[\frac{n-2}{2}\right]} R_{j+1+\left[\frac{n-2}{2}\right]}, \tag{8}$$

$$R_{j-1} R_{j+1} \parallel R_{j-2} R_{j+2} \parallel \cdots \parallel R_{j-\left[\frac{n-2}{2}\right]} R_{j+1+\left[\frac{n-2}{2}\right]}, \tag{9}$$

ove gli indici si intendono considerati modulo n.

Siccome la nozione di poligono affin-regolare non si basa che sui tre assiomi d'incidenza punto-retta, essa può venir definita nello stesso modo anche in $A_{2,q}$:

Un n-agono ($n \geq 4$) $S_0 S_1 \cdots S_{n-1}$ *di* $A_{2,q}$ *soddisfacente alle* (8) *e* (9), *dove al posto di* R_i *si pensi* S_i, *viene chiamato n-agono affin-regolare.*

Avuto riguardo del Teor. 1, si vede subito che $P_0 P_1 \cdots P_q$ è affin-regolare.

Consideriamo contemporaneamente un n-agono affin-regolare, $R_0 R_1 \cdots \cdots R_{n-1}$, del piano euclideo e un n-agono affin-regolare $S_0 S_1 \cdots S_{n-1}$ di $A_{2,q}$. Da quanto sopra segue facilmente che la corrispondenza δ definita mediante

$$R_i^{\delta} = S_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

conserva i parallelismi delle corde dei rispettivi poligoni, ossia, presi quattro indici distinti i_1, i_2, i_3, i_4 ($1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$), sussiste sempre la relazione:

$$R_{i_1} R_{i_2} \parallel R_{i_3} R_{i_4} \Longleftrightarrow S_{i_1} S_{i_2} \parallel S_{i_3} S_{i_4} .$$

2. In questo paragrafo ci proponiamo di provare che ogni poligono affin-regolare è inscritto in una conica non degenere, e poi – sfruttando questo fatto – di determinare i valori di n per i quali esistono degli n-agoni affin-regolari.

TEOREMA 2. *Un n-agono affin-regolare non degenere di* $A_{2,q}$ *risulta necessariamente inscritto in una conica.*

Dimostrazione. In modo del tutto analogo al caso del piano euclideo classico si prova che:

a) ogni pentagono non degenere fornisce univocamente una conica passante per i suoi vertici:

b) due coniche aventi quattro punti ed una tangente in comune risultano coincidenti.

Per i valori di n non superanti 5, dalla proposizione *a*) segue immediatamente l'asserto. Sia dunque $n \geq 6$. Presi un n-agono affin-regolare $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ ed un indice l ($0 \leq l \leq n-1$), per l'esagono $R_{l-3} R_{l-2} R_{l-1} R_l R_{l+1} R_{l+2}$ in virtù delle (8) e (9) valgono le

$$R_{l-1} R_l \parallel R_{l-2} R_{l+1} , \tag{10}$$

$$R_{l-1} R_{l+1} \parallel R_{l-2} R_{l+2} . \tag{11}$$

Consideriamo la conica (univocamente determinata) passante per i vertici del pentagono $R_{l-3} R_{l-2} R_{l-1} R_l R_{l+1}$. L'esagono pascaliano, $R_{l-3} R_{l+1} R_{l-2} R_{l-1} R_l$, inscritto in Ω, ammette in forza della (12) due coppie di lati paralleli – ($R_{l-1} R_l$; $R_{l-2} R_{l+1}$) e ($R_{l-3} R_l$; $R_{l-2} R_{l-1}$) – che risultano essere opposti. Pertanto il lato $R_{l-1} R_{l-1} = t_{l-1}$ – cioè la tangente di Ω per il punto R_{l-1} – è anch'essa parallela al lato opposto $R_{l-3} R_{l-1}$, quindi:

$$t_{l-1} = R_{l-1} R_{l-1} \parallel R_{l-3} R_{l+1} . \tag{12}$$

Allo stesso modo si prova che l'esagono pascaliano $R_{l-3} R_{l+1} R_{l-2} R_{l-2} R_l R_{l-1}$ implica che

$$t_{l-2} = R_{l-2} R_{l-2} \parallel R_{l-3} R_{l-1} . \tag{13}$$

Passando dall'ultimo capoverso col porvi al posto di $l\ l+1$ ed al posto di $R_{l-3} R_{l+2} R_{l-1} R_l R_{l+1}$ $R_{l-2} R_{l-1} R_l R_{l+1} R_{l+2}$, si denoti con Ω, la conica circoscritta a quest'ultimo pentagono e con t'_1 e t'_{l-1} le tangenti di Ω' nei punti R_i e R_{l-1}; dalle (12), (13) si ricavano allora le

$$t'_1 \parallel R_{l-2} R_{l+2} , \tag{14}$$

$$t'_{l-1} \parallel R_{l-2} R_l . \tag{15}$$

Confrontando le (12), (11) e (15) discende allora senz'altro che

$$t_{l-1} \parallel R_{l-3} R_{l+1} \parallel R_{l-2} R_l \parallel t'_{l-1} . \tag{16}$$

Ne segue che le coniche Ω e Ω' hanno i quattro punti $R_{l-2}, R_{l-1}, R_l, R_{l+1}$ in comune ed ammettono nel punto R_{l-1} la stessa tangente; sicché, in virtù della proposizione *b*), $\Omega = \Omega'$. Da ciò, al variare di l da 1 a n, si ottiene l'asserto.

TEOREMA 3. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè su di un piano affine di Galois d'ordine $q = p^r$ ($p \neq 2$) esistano degli n-agoni affin-regolari non degeneri, è che n risulti divisore di uno degli interi $p^r + 1$, $p^r - 1$, p.*

È noto che tutti i piani di Galois di uno stesso ordine sono tra loro isomorfi. Dunque al posto di un qualsivoglia piano affine di Galois d'ordine q, q dispari, si può porre il piano $A_{2,q}$ introdotto nel n. 1.

Dimostrazione della sufficienza. Abbiamo già visto – Teorema 1 – che $A_{2,q}$ ammette un $(q+1)$-agono affin-regolare $P_0 P_1 \cdots P_q$. Se $q + 1 = n \cdot d$ ($d > 1$), in forza dell'osservazione svolta nell'ultimo capoverso del n. 1 si verifica subito che $P_d P_{2d} \cdots P_{nd}$ risulta un n-agono affin-regolare.

Sia ora n un divisore di $p^r - 1$. Consideriamo su $A_{2,q}$ l'iperbole definita mediante l'equazione $xy = 1$. È immediato verificare che due corde di essa, determinate dagli estremi $(x_1, 1/x_1)$; $(x_4, 1/x_4)$ e $(x_2, 1/x_2)$; $(x_3, 1/x_3)$, risultano parallele se, e soltanto se,

$$x_1 x_4 = x_2 x_3 . \tag{17}$$

Preso un elemento x ($x \neq 0$) del campo primo F, per tutti i valori di i e j si ha ovviamente

$$x^j x^{j+1} = x^{j-i} x^{j+i+1}, \tag{18}$$

$$x^{j-1} x^{j+1} = x^{j-i} x^{j+i} . \tag{19}$$

Avuto riguardo alla (17), le (18) e (19) forniscono che *l'n-agono* $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ definito mediante $R_j = (x^j, 1/x^j)$ è affin-regolare.

Sia $n = p$. Con un breve calcolo si verifica che i punti (x_1, x_1^2), (x_4, x_4^2) e (x_2, x_2^2), (x_3, x_3^2) della parabola $y = x^2$ determinano corde parallele se, e soltanto se,

$$x_1 + x_4 = x_2 + x_3 . \tag{20}$$

Assunto $x_j = j$ – dove il numero intero $j\,(0 \leq j \leq p - 1)$ viene considerato elemento del campo primo F – si vede subito che risulta:

$$x_j + x_{j+1} = j + (j+1) = (j-1) + (j+2) = x_{j-1} + x_{j+2} ,$$

$$x_{j-1} + x_{j+1} = (j-1) + (j+1) = (j-2) + (j+2) = x_{j-2} + x_{j+2} ;$$

pertanto, in forza della (20), si ha che, posto $R_j = (j, j^2)$, $R_0 R_1 \cdots R_{p-1}$ risulta un p-agono affin-regolare.

Dimostrazione della necessità. Abbiamo visto che ogni poligono affin regolare $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ è inscritto in una conica Ω (Teor. 2) e sappiamo anche che ([5], p. 15), operando con una opportuna affinità, Ω è rappresentabile in una delle seguenti forme canoniche:

1) $xy = 1$,

2) $y = x^2$,

3) $x^2 - \vartheta y^2 = 1$.

Dimostreremo l'asserto in ognuno dei casi 1), 2), 3).

1) È già stato accennato che i punti $(x_1, 1/x_1)$, $(x_4, 1/x_4)$ e $(x_2, 1/x_2)$, $(x_3, 1/x_3)$ dell'iperbole $xy = 1$ determinano corde parallele se, e soltanto se, è verificata la (18). Si osservi che la precedente proposizione viene estesa anche al caso in cui al posto di una corda si prenda una tangente; ossia la corda passante per i punti $(x_2, 1/x_2)$ e $(x_3, 1/x_3)$ risulta parallela alla tangente uscente dal punto $(x_1, 1/x_1)$ se, e soltanto se,

$$x_1 x_1 = x_2 x_3 . \tag{21}$$

Dunque, con la sostituzione $x_4 = x_1$ la (18) resta formalmente valida.

Avuto riguardo alla (17), si ha che $R_{j-1} R_{j+1}$ e la tangente per R_j sono parallele; sicché tenendo conto delle (18) e (21), l'affin-regolarità di $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ fornisce che per ogni $i, j\,(1 \leq j \leq n)$ sussistono le

$$x_j x_{j+1} = x_{j+1} x_i \quad , \quad x_j x_{j+1} = x_{j+1} x_1 , \tag{22}$$

ove gli indici si intendono modulo n.

Moltiplicando fra di loro membro a membro le equazioni (22), per i che varia da 1 a n, si ha che:

$$x_j^n (x_1 x_2 \cdots x_n) = x_{j+1}^n (x_1 x_2 \cdots x_n) . \tag{23}$$

Siccome $x_j \neq 0$ per ogni j, la (23) implica le

$$x_1^n = x_2^n = \cdots = x_n^n ,$$

sicché gli elementi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ formano un gruppo, sottogruppo d'ordine $p^r - 1$ del gruppo moltiplicativo di F. Dunque n divide $p^r - 1$.

2) Si verifica facilmente che la corda passante per i punti (x_2, x_2^2), (x_3, x_3^2) e la tangente per il punto (x_1, x_1^2) della parabola $y = x^2$ risultano parallele se, e soltanto se, la (20) è soddisfatta. Tenendo conto della (20), $R_1 R_2 \cdots R_n$ fornisce per ogni i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ le due relazioni

$$x_j + x_{j+i} = x_{j+1} + x_i , \tag{24}$$

$$x_j + x_{j+3} = x_{j+1} + x_{j+2} \quad , \quad x_j + x_{j+4} = x_{j+1} + x_{j+3} , \tag{25}$$

ove gli indici si intendono sempre modulo n. Sommando le uguaglianze della (24) per i che varia da 1 a n, si ha che $nx_1 = nx_2 = \cdots = nx_n$. Tenendo conto del fatto che p è la caratteristica del campo primo di F, ne segue che p divide n, onde $n \geq p$.

Consideriamo ora il sistema di equazioni alle differenze finite (25). Sottraendo dalla seconda equazione la prima, si ha:

$$x_{j+4} - 2x_{j+3} + x_j + 2 = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots). \tag{26}$$

È noto dall'algebra elementare che la soluzione della (26) è $x_j = c_1 + c_{2j}$, ove c_1, c_2 sono elementi di F indipendenti da j. Dalla (26) discende manifestamente che

$$x_{j+p} = x_j ,$$

eppertanto $n \leq p$. Resta così provato l'asserto.

3) Abbiamo già visto nella dimostrazione del Teorema 2 – più precisamente nel capoverso contenente la (20) – che, per ogni j $(1 \leq j \leq n)$, la corda $R_{j-1} R_{j+1}$ di un n–agono affin–regolare $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ e la tangente per R_j della conica circoscritta ad esso – che attualmente è la circonferenza di centro l'origine e norma 1 – sono paralleli. Pertanto la simmetria ψ_j $(1 \leq j \leq n)$ che muta R_{j-1} in R_{j+1} lascia fisso R_j. Prendendo ancora la simmetria φ_j che muta R_j in R_{j+1} si ha per ogni j $(j = 1, 2, \cdots, n)$:

$$\psi_j(R_{j-1}) = R_{j+1} \quad , \quad \psi_j(R_{j+1}) = R_{j-1} \quad , \quad \psi_j(R_j) = R_j , \tag{27}$$

$$\varphi_j(R_j) = R_{j+1} \quad , \quad \varphi(R_{j+1}) = R_j ,$$

sicché la rotazione univocamente determinata, ρ_j, che muta R_{j-1} in R_j vale $\rho_j = \varphi_j \circ \psi_j$. Ma nello stesso tempo dalla (27) segue

$$\rho_j(R_j) = R_{j+1} ,$$

onde

$$\rho_j = \rho_{j+1} .$$

Al variare di j da 1 a n, si vede allora subito che

$$\rho = \rho_1 = \rho_2 \cdots = \rho_n ;$$

pertanto l'ordine del movimento ρ vale n. Essendo ρ un elemento di N_q^+, ossia di un gruppo d'ordine $p^r + 1$, ne discende che n risulta un divisore di $p^r + 1$, e dunque l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] BELTRAMETTI E. G. (1970) – *Geometrie di Galois e loro applicazioni alla fisica*, II. *Applicazioni alla fisica*, Seminari tenuti nei Laboratori Naz. del CNEN Frascati.

[2] JÄRNEFELT G. – *Reflections on a finite approximation to Euclidean geometry*, Physical and astronomical prospects, «Ann. Acad. Sci. Fenn.», *96*.

[3] KORCHMÀROS G. (1972) – *Affin sikok oválisaiból kiválasztható reguláris pontalakzatok* (Doktori értekezés, Budapest).

[4] KUSTANHEIMO P. and QVIST B. – *Finite geometries and their application*, «Nordisk. Mat. Tidskr.», *2*, 127–155.

[5] TALLINI G. (1970) – *Geometrie di Galois e loro applicazioni alla fisica*, Introduzione alla geometrie di Galois, Seminari tenuti nei Laboratori Nazionali del CNEN, Frascati.

[6] TALLINI G. (1960) – *Le geometrie di Galois e loro applicazioni alla statistica e alla teoria dell'informazione*, «Rend. Mat.», *19*, 379.