Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Lenzi, Angiola Letizia

Una generalizzazione al caso degli pseudomoduli di un'immersione non standard di un anello in un anello unitario

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.5, p. 661–666.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_5_661_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 28 maggio 1974

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Una generalizzazione al caso degli pseudomoduli di un'immersione non standard di un anello in un anello unitario.* Nota di DOMENICO LENZI (*) e ANGIOLA LETIZIA, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In a recent paper (see [2]) a method has been introduced, which appears preferable to the classical one, for embedding a ring into a unitary ring. In this paper we give a generalization of that method to pseudomodules (cfr. [1], 256), thus reaching results not obtainable with the method of [1].

1. INTRODUZIONE

In un recente lavoro (vedi [2]) è stata ottenuta una immersione di un anello in un anello unitario che presenta notevoli vantaggi rispetto a quella classica. In questo lavoro si generalizzano i concetti ed alcuni teoremi introdotti in [2] estendendoli al caso di pseudomoduli su di un anello (vedi [1], 256). Tra l'altro il metodo qui proposto consente, dato uno pseudomodulo M su di un anello R, di immergere R in un opportuno anello unitario $\overline{R}$ e di estendere ad $\overline{R} \times M$ l'operazione relativa ad $R \times M$ (cfr. [1], 256), in maniera tale che se M è un modulo su R allora $\overline{R}$ è isomorfo ad R; inoltre se R è un sottoanello di End (M) ed i è l'endomorfismo identico su M si ha che $\overline{R}$ è isomorfo al sottoanello di End (M) generato da R e da i. Tali risultati non sembrano ottenibili usando il metodo proposto in [1].

(*) Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 28 maggio 1974.

2. Sia dato un qualsiasi pseudomodulo M su un anello A.

Definizione 1. Un elemento $a \in A$ lo diciamo (A, M)–intero (cfr. [2]) se esiste un $n \in Z$ tale che $ab = ba = nb$ per ogni $b \in A$ ed inoltre $ax = nx$ per ogni $x \in M$.

Se $n \neq 0$ parliamo di (A, M)–intero proprio.

Definizione 2. Un elemento $a \in A$ lo diciamo un (A, M)–annullatore se $ab = ba = 0$ per ogni $b \in A$ ed $ax = 0$ per ogni $x \in M$.

N.B. È chiaro che l'insieme degli (A, M)–annullatori è l'intersezione dell'ideale degli annullatori di A e dell'ideale degli annullatori di M [1], è quindi esso stesso un ideale.

In base alle definizioni date si può facilmente generalizzare la Prop. 1 di [2] con la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Se lo pseudomodulo* M *su* A *ammette un* (A, M)*–intero proprio esistono* $a' \in A$ *ed* $n' \in N - \{0\}$ *tali che* $a'b = ba' = n'b$ *per ogni* $b \in A$ *ed* $a'x = n'x$ *per ogni* $x \in M$.

L'(A, M)–intero di cui alla Prop. 1 lo diremo di *tipo positivo* e chiameremo grado di a' (grad (a')) il più piccolo intero positivo m tale che $a'b = ba' = mb$ per ogni $b \in A$ e $a'x = mx$ per ogni $x \in M$.

Inoltre un (A, M)–intero di tipo positivo lo diremo *minimale* se il suo grado è minimo nell'insieme dei gradi degli (A, M)–interi di tipo positivo.

È immediato dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 2. *Chiamato* H *l'ideale degli* (A, M)*–annullatori, se* $a \in A$ *è un* (A, M)*–intero minimale e* b *è un qualsiasi elemento di* A*, si ha che* b *è un* (A, M)*–intero minimale se e solo se* $(a - b) \in H$.

COROLLARIO 1. *Se lo pseudomodulo* M *su* A *possiede un unico* (A, M)*–annullatore, esiste al più un* (A, M)*–intero minimale.*

Sussistono anche i seguenti Teoremi e proposizioni, semplici generalizzazioni degli analoghi riportati in [2]; per le dimostrazioni, basta apportare alcuni opportuni ritocchi a quelle date in [2].

TEOREMA 1. *Se l'*(A, M)*–intero* $a \in A$ *e* $n \in Z$ *sono tali che* $ab = ba = nb$ *per ogni* $b \in A$ *e* $ax = nx$ *per ogni* $x \in M$, n *è multiplo del grado* m *di un qualsiasi* (A, M)*–intero minimale* a'.

PROPOSIZIONE 3. *Se* $a \in A$ *è un* (A, M)*–intero, l'insieme dei multipli interi di* a *è un sottoanello abeliano di* $A(+, \cdot)$*, costituito da* (A, M)*–interi.*

PROPOSIZIONE 4. *L'insieme degli* (A, M)*–interi costituisce un sottoanello abeliano di* $A(+, \cdot)$.

(1) Per annullatore di uno pseudomodulo M su di un anello A è da intendersi un elemento $a \in A$ tale che $ax = 0$ per ogni $x \in M$ (cfr. [4], 144).

TEOREMA 2. *Sia* $a \in$ A *un* (A , M)*–intero proprio. Condizione (ovviamente necessaria, ma anche) sufficiente perchè* A $(+ , \cdot)$ *abbia caratteristica positiva è che* a *sia ciclico.*

TEOREMA 3. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'anello* A $(+, \cdot)$ *abbia caratteristica positiva è che ogni* (A , M)*–annullatore sia un* (A , M)*–intero proprio.*

TEOREMA 4. *Se lo pseudomodulo* M *su* A *ammette un* (A , M)*–intero proprio, l'ideale* H $(+ , \cdot)$ *degli* (A , M)*–annullatori ha caratteristica positiva, la quale è divisore del grado di un qualsiasi* (A , M)*–intero minimale.*

In [2] è stata data la definizione di «intero virtuale» riferendosi tacitamente al caso di anelli dotati di A–interi propri; ci proponiamo di generalizzare e completare tale definizione estendendola agli pseudomoduli.

Definizione 3. Un (A , M)–intero b è detto un «(A , M)–intero virtuale» se $b = 0$ oppure se, esistendo (A , M)–interi propri, esiste $n \in Z$ tale che $na' = b$ qualunque sia l'(A , M)–intero minimale a'.

Assegnato uno pseudomodulo M su A, diamo la seguente:

Definizione 4. Chiamiamo (A , M)–caratteristica il più piccolo intero positivo c (supposto che esista) tale che $ca = 0$ per ogni $a \in$ A e $cx = 0$ per ogni $x \in$ M.

In caso contrario diremo che la (A , M)–caratteristica è zero.

Ovviamente l'(A , M)–caratteristica di uno pseudomodulo M su di un anello A è il minimo comune multiplo della caratteristica di A e del cosiddetto esponente di M (2).

TEOREMA 5. *Se lo pseudomodulo* M *su* A *ha come unico* (A , M)*–annullatore lo zero di* A, *allora ogni* (A , M)*–intero è un* (A , M)*–intero virtuale.*

Dimostrazione. Sia $a \in$ A un (A , M)–intero. Se $a = 0$ allora a è, per definizione, un (A , M)–intero virtuale. Sia allora $a \neq 0$. Per le ipotesi date, a non è un (A , M)–annullatore, onde è un (A , M)–intero proprio, per cui esistono (A , M)–interi minimali.

Sia a' l'unico (A , M)–intero minimale (ved. Cor. 1), sia $m' = \text{grad}\,(a')$ e sia $m \in Z$ tale che $ab = ba = mb$ per ogni $b \in$ A e $ax = mx$ per ogni $x \in$ M. Per il Teor. 1, si ha che $m = q \cdot m'$ (con $q \in Z$), per cui $a - qa'$ è un (A , M)–annullatore, onde $a = qa'$.

PROPOSIZIONE 5. *Sia* $a \in$ A *un* (A , M)*–intero e sia* $m \in Z$ *tale che* $ab = ba = mb$ *per ogni* $b \in$ A *ed* $ax = mx$ *per ogni* $x \in$ M. L' (A , M)*–caratteristica è zero se e solo se l'intero* m *di cui sopra è unico.*

Dimostrazione. Se l'(A , M)–caratteristica è zero ed $m' \in Z$ è tale che $ab = ba = m'b\ (= mb)$ per ogni $b \in$ A ed $ax = m'x\ (= mx)$ per ogni $x \in$ M,

(2) Equivalentemente a quanto espresso in [3] (p. 14), per esponente di un gruppo M è da intendersi il più piccolo intero positivo n (supposto che esista) tale che $nx = 0$ per ogni $x \in$M; in caso contrario, per esponente è da intendersi lo zero.

si ha che $(m - m') b = 0$ per ogni $b \in A$ ed $(m - m') x = 0$ per ogni $x \in M$, onde $m - m' = 0$ ed $m = m'$.

Viceversa, supponiamo che l'(A, M)-caratteristica sia $c \neq 0$. Si avrà allora che $m + c \neq m$, $ab = ba = (m + c) b$ per ogni $b \in A$ ed $ax = (m + c) x$ per ogni $x \in M$; da ciò segue immediatamente la tesi.

N.B. Le considerazioni svolte nel Teor. 5. e nella successiva Prop. 5 possono naturalmente essere trasferite al caso di anelli; il che non è stato adeguatamente evidenziato in [2].

Enunciamo ora due teoremi che estendono al nostro caso i Teoremi 5 e 6 di [2], ai quali si rimanda per la dimostrazione.

TEOREMA 6. *Sia* M *uno pseudomodulo su* A *per il quale esistono* (A, M)-*interi propri, sia* a' *un qualunque* (A, M)-*intero minimale, sia* c *la caratteristica dell'ideale degli* (A, M)-*annullatori* (*positiva per il Teor.* 4), *sia* b *l'intero virtuale* ca' *e sia* $\mathrm{grad}(b) = p$. *Considerato l'ampliamento unitario classico* $A \times Z(+, \cdot)$ *di* A, *l'insieme* S *degli elementi di* $A \times Z$ *del tipo* $(lb, -lp)$ *con* $l \in Z$ *è un suo ideale bilatero.*

TEOREMA 7. *Sia* M *uno pseudomodulo su* A; *sia inoltre* S *l'ideale indicato nel Teor.* 6 *nel caso che esista un* (A, M)-*intero proprio, sia invece* S *l'ideale nullo nel caso contrario. Allora l'anello* $A(+, \cdot)$ *risulta immerso nell'anello unitario* $A \times Z(+, \cdot)/S$ *dalla applicazione che associa ad ogni elemento* $x \in A$ *l'elemento* $[x, 0] = (x, 0) + S \in A \times Z/S$. *Inoltre, nel caso in cui* $S \neq \{(0, 0)\}$, *se* $v = hb$ (*con* $h \in Z$), *si ha* $[v, 0] = [0, hp]$ *dove* $p = \mathrm{grad}(b)$.

TEOREMA 8. *Sia* M *uno pseudomodulo su* A *e sia* $\bar{A}$ *il sovranello unitario di* A *di cui al Teor.* 7. *L'operazione* $\cdot : \bar{A} \times M \to M$, *definita ponendo* $[a, m] \cdot x = ax + mx$ *per ogni* $[a, m] \in \bar{A}$ *e per ogni* $x \in M$, *è un prolungamento del prodotto esterno relativo allo pseudomodulo* M *su* A *e conferisce ad* M *una struttura di modulo su* $\bar{A}$.

Dimostrazione. L'operazione è ben definita in quanto, facendo riferimento alle notazioni del Teor. 6, se $[a, m] = [a', m']$ si ha $a - a' = lb$ e $m - m' = -lp$, per cui $ax + mx - a'x - m'x = (a - a') x + (m - m') x = lbx - lpx = 0$. Il resto della dimostrazione, una semplice verifica, si tralascia per brevità.

PROPOSIZIONE 6. *Se lo pseudomodulo* M *su* A *ha come unico* (A, M)-*annullatore lo* 0 *di* A, *ed è dotato di* (A, M)-*interi propri, allora l'ideale* S *di cui al Teor.* 6 *è costituito dalle coppie del tipo* $(a, -m)$ *dove* a *è* (A, M)-*intero e* $m \in Z$ *è tale che* $ab = ba = mb$ *per ogni* $b \in A$ *e* $ax = mx$ *per ogni* $x \in M$.

Dimostrazione. Nel nostro caso la caratteristica dell'ideale degli (A, M)-annullatori è 1, ed esiste un unico (A, M) intero minimale a' (ved. Cor. 1), per cui gli elementi di S sono del tipo $(la', -lm')$ dove $m' = \mathrm{grad}(a')$. Tenendo presente la dimostrazione del Teor. 5, la tesi segue senza difficoltà.

PROPOSIZIONE 7. *Sia* M $(+)$ *un gruppo abeliano strutturato in maniera naturale come pseudomodulo su di un sottoanello* A *di* End (M)[3]. *Si ha che esiste un unico* (A , M)*-annullatore.*

Dimostrazione. Basta osservare che lo pseudomodulo M su A ha come unico annullatore (quindi anche come unico (A , M)–annullatore, vedi N.B. relativo alla Def. 2) l'endomorfismo nullo.

Indicato con i l'endomorfismo identico di M, si ha la seguente proposizione la cui dimostrazione riducesi ad una semplice verifica.

PROPOSIZIONE 8. *Sia* M *un gruppo abeliano strutturato in maniera naturale come pseudomodulo su di un sottoanello* A *di* End (M). *Se* $f \in \mathrm{A}$ *è tale che* $f = mi$ (*con* $m \in \mathrm{Z}$), *allora* f *è un* (A , M)*–intero ed* $m \in \mathrm{Z}$ *è tale che* $fg = gf = mg$ *per ogni* $g \in \mathrm{A}$ *e* $fx = mx$ *per ogni* $x \in \mathrm{M}$.

TEOREMA 9. *Sia* M $(+)$ *un gruppo abeliano strutturato in maniera naturale come modulo sull'anello* End (M), *e sia* A $(+ , \cdot)$ *un sottoanello di* End (M). *L'anello unitario* $\bar{\mathrm{A}}$, *di cui al Teor.* 7, *è isomorfo in modo naturale al sottoanello di* End (M) *generato da* A *e da* i.

Dimostrazione. Conservando ai simboli il significato che hanno nel Teor. 7, facciamo corrispondere ad ogni elemento $[f , m] \in \bar{\mathrm{A}}$ l'elemento $f + mi$ di End (M); si ottiene così un'applicazione φ da $\bar{\mathrm{A}}$ verso End (M) in quanto da $[f , m] = [g , n]$ segue $f + mi = g + ni$; ciò è banale se $\mathrm{S} = \{(0 , 0)\}$; se invece $\mathrm{S} \neq \{(0 , 0)\}$, basta tenere presente la forma degli elementi di S.

Che φ sia un omomorfismo segue immediatamente dalla definizione; che φ sia suriettiva segue dalla definizione e dalla caratterizzazione degli elementi dell'anello generato da A e da i; verifichiamo che è iniettiva.

Sia $\mathrm{S} = \{(0 , 0)\}$ (onde non esistono (A , M)–interi propri). Poichè da $\varphi([f , m]) = 0$ segue $f + mi = 0$, per la Prop. 8 si ha $(f , m) = (0 , 0) \in \mathrm{S}$. Sia invece $\mathrm{S} \neq \{(0 , 0)\}$. Da $\varphi([f , m]) = 0$ segue ancora $f + mi = 0$; in virtù delle Prop. 7, 8 e 6, avremo che $(f , -(-m)) = (f , m) \in \mathrm{S}$. In entrambi i casi si ha dunque $[f , m] = 0 \in \bar{\mathrm{A}}$, e ciò assicura che φ è iniettiva.

Sia M uno pseudomodulo su di un anello R. Considerato il modulo su $\bar{\mathrm{R}}$ di cui al Teor. 8, sia ψ l'omomorfismo che ad ogni $[r , m] \in \bar{\mathrm{R}}$ associa l'endomorfismo $\widehat{[r , m]}$ di M naturalmente associato ad $[r , m]$ per definizione di pseudomodulo (onde $\widehat{[r , m]}(x) = rx + mx$[4]). Allora si ha il seguente

COROLLARIO 2. *Il sovranello unitario* $\overline{\psi(\mathrm{R})}$ *di* $\psi(\mathrm{R})$ *è isomorfo al sottoanello di* End (M) *generato da* $\psi(\mathrm{R})$ *e da* i.

In base alle notazioni dianzi introdotte, si ha il seguente

TEOREMA 10. *Gli anelli* $\overline{\psi(\mathrm{R})}$ *e* $\psi(\bar{\mathrm{R}})$ *sono isomorfi.*

(3) Cioè si pone $f \cdot x = f(x)$ per ogni $f \in \mathrm{A}$ e per ogni $x \in \mathrm{M}$.

(4) L'ultimo passaggio è giustificato dal Teor. 8.

Dimostrazione. Per il Cor. 2 basta dimostrare che $\psi(\bar{\mathrm{R}})$ è isomorfo al sottoanello di End (M) generato da $\psi(\mathrm{R})$ e da i. Questo è sicuramente vero in quanto, ponendo $\tau(\overline{[r\widehat{,}m]}) = \overline{[r\widehat{,}0]} + mi$ per ogni $\overline{[r\widehat{,}m]} \in \psi(\bar{\mathrm{R}})$, si ottiene una applicazione di $\psi(\bar{\mathrm{R}})$ sul sottoanello di End (M) generato da $\psi(\mathrm{R})$ e da i, e tale applicazione è un isomorfismo come si verifica agevolmente.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI – *Algèbre*, chap. 2, III-ème edition, Hermann, Paris.
[2] D. LENZI (1972) – *Sull'immersione di un anello in un anello unitario*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei » (8), *53*, 342–348.
[3] E. SCHENKMAN (1965) – *Group Theory*, Van Nostrand, Princeton.
[4] O. ZARISKI e P. SAMUEL (1965) – *Commutative Algebra*, vol. I, Van Nostrand.