Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Piero Caldirola

## Sul moto di una particella in vari tipi di campi nella relatività generale

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **56** (1974), n.4, p. 575–580.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_575_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI*
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

## SEZIONE II

### (Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

---

**Fisica.** — *Sul moto di una particella in vari tipi di campi nella relatività generale.* Nota I [(*)] del Corrisp. PIERO CALDIROLA.

SUMMARY. — The possibility for a description in General Relativity of the motion of a particle subject to the action of different fields (f.i. electromagnetic field and nuclear field) in addition to the gravitation by means of a variational principle is examined. The principle consists in a generalization of the variational principle used in Special Relativity and coincides, for a free particle subject to the gravitational field only, with the well known principle of the geodesics. The formalism is extended to include also pseudotensorial fields of interest for the elementary particle physics.

Recentemente, anche in vista dei tentativi di tener conto nella teoria delle particelle elementari (fondata essenzialmente sulla quantizzazione dei campi) degli effetti gravitazionali, si è affacciata da più parti l'opportunità di scrivere nello schema della relatività generale le equazioni del moto di una particella soggetta, oltre al campo gravitazionale, all'azione di campi esterni come quello elettromagnetico e quello mesonico che caratterizza l'interazione fra nucleoni.

In questa Nota vogliamo mostrare come tali equazioni possono essere facilmente dedotte da un semplice principio variazionale che generalizza quello di regola usato per lo studio del moto di una particella nella relatività ristretta.

Ricordando infatti che il campo elettromagnetico è caratterizzato da un potenziale vettore $\Phi^i$, mentre il campo mesonico da un potenziale scalare [(1)] $\varphi$ l'immediata generalizzazione della lagrangiana usata nella relatività speciale [(2)] porta per una metrica generica del tipo

$$- ds^2 = g_{ik} \, dx^i \, dx^k \qquad (i , k = 1 , 2 , 3 , 4)$$

ad assumere

$$L = m_0 \, u_i \, u^i + e u_i \, \Phi^i - \alpha\varphi = - m_0 + e u_i \, \Phi^i - \alpha\varphi \tag{1}$$

dove

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad u_i = g_{ik} \, u^k$$

e dove i potenziali $\Phi^i$ e $\varphi$ si intendono funzioni delle sole $x^i$. Inoltre $m_0$ indica la massa a riposo, $e$ la carica elettrica e $\alpha$ la « carica mesonica » della particella.

(*) Presentata nella seduta del 20 aprile 1974.

(1) In realtà tale potenziale è uno pseudoscalare, ma ciò non ha rilevanza sulle considerazioni di questa Nota come vedremo esplicitamente nel corso di essa.

(2) P. CALDIROLA, *Istituzioni di Fisica Teorica* (Parte II; Cap. VI) (Milano 1965). Parte dei risultati qui riportati sono dovuti a G.M. PROSPERI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *18*, 69 (1955).

Varrà ovviamente la relazione:

$$g_{ik}\,u^i\,u^k + 1 = 0\,. \tag{2}$$

Dedurremo le equazioni del moto dalla lagrangiana L, che per maggiore generalità supporremo una funzione generica di $x^i$ e di $u^i$, cioè $L = L(x^i\,,\,u^i)$, mediante il principio variazionale.

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} L\,ds = 0 \tag{3}$$

sotto l'azione dei vincoli costituiti dalla (2).

Tale principio è ovviamente equivalente al principio variazionale non vincolato

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} L^*\,ds = 0$$

con

$$L^* = L + \frac{\lambda}{2}\,(g_{ik}\,u^i\,u^k + 1)\,,$$

la variazione essendo eseguita rispetto alle $x^i$ e al parametro $\lambda$ che si riterrà funzione del solo invariante $s$.

Si hanno così le equazioni di Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right) + \frac{\lambda}{2}\,\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\,u^r\,u^s - \frac{d}{ds}\,(\lambda g_{ri}\,u^r) = 0\,. \tag{4}$$

Moltiplicando per $u^i$ si ottiene:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}\,u^i - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right)u^i + \frac{\lambda}{2}\,\frac{dg_{rs}}{ds}\,u^r\,u^s - \frac{d}{ds}\,(\lambda g_{ri}\,u^r)\,u^i = 0\,.$$

Sviluppando gli ultimi due termini si ha:

$$\frac{\lambda}{2}\,\frac{dg_{ri}}{ds}\,u^r\,u^i - \lambda g_{ri}\,\frac{du^r}{ds}\,u^i + \lambda\,\frac{dg_{ri}}{ds}\,u^r\,u^i - \frac{d\lambda}{ds}\,g_{ri}\,u^r\,u^i =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\,\frac{d}{ds}\,(g_{ri}\,u^r\,u^i) - \frac{d\lambda}{ds}\,(g_{ri}\,u^r\,u^i) = \frac{d\lambda}{ds}\,.$$

Le equazioni precedenti diventano pertanto:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}\,u^i - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right)u^i + \frac{d\lambda}{ds} = 0\,,$$

da cui integrando

$$\lambda = \frac{\partial L}{\partial u^i}\,u^i - L\,.$$

Moltiplicando le equazioni (4) di Lagrange per $g_{ri}$ e sostituendo in esse per $\lambda$ il valore trovato si ha:

$$g^{ir}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^i} - g^{ir}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^i}\right) - \tag{5}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u^i}u^i - \mathrm{L}\right)u^r + \left\{ {r \atop i\;l} \right\}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u^k}u^k - \mathrm{L}\right)u^i u^l\right] = 0$$

dove

$$\left\{ {r \atop i\;l} \right\} = \frac{1}{2}g^{rk}\left(g_{ik,l} + g_{kl,i} - g_{il,k}\right)$$

rappresenta il generico simbolo di Christoffel di seconda specie.

Le (5) sono le equazioni generali del moto della nostra particella che ammette una lagrangiana $\mathrm{L}(x^i, u^i)$.

2. Esplicitiamo ora tali equazioni nel caso che la lagrangiana L sia del tipo (1). Si ottiene:

$$m_0\frac{\mathrm{d}u^r}{\mathrm{d}s} = -m_0\left\{ {r \atop i\;k} \right\}u^i u^k + e\mathrm{F}^{rk}u_k - \alpha\left[\frac{\mathrm{d}(\varphi u^r)}{\mathrm{d}s} + \varphi^{/r}\right] \tag{6}$$

dove si è posto

$$\mathrm{F}_{rk} = \Phi_{k/r} - \Phi_{r/k} \text{ (3)}.$$

Consideriamo ora alcuni casi particolari notevoli.

a) *Particella libera in un campo gravitazionale.*

Si ha $\Phi^\alpha = 0 \quad \varphi = 0$ per cui la (6) si riduce alla

$$\frac{\mathrm{d}u^r}{\mathrm{d}s} = -\left\{ {r \atop i\;k} \right\}u^i u^k$$

che è notoriamente l'equazione della geodetica, in conformità al fatto che in questo caso il principio variazionale (3) si riduce a

$$\delta\int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}s = 0\,.$$

b) *Particella in un campo gravitazionale e sotto l'azione di forze elettromagnetiche.*

Sia ha $\varphi = 0$ per cui $\mathrm{L} = m_0 u_i u^i + eu_i\Phi^i$, e l'equazione del moto si scrive:

$$\frac{\mathrm{d}u^r}{\mathrm{d}s} = -\left\{ {r \atop i\;k} \right\}u^i u^k + \frac{e}{m_0}\mathrm{F}^{rk}u_k\,,$$

in accordo a quanto ben noto.

(3) Si noti che se avessimo considerato forze derivanti da un potenziale tensoriale simmetrico $\varphi_{ik}$, nella (1) si sarebbe dovuto includere un termine $-\frac{1}{2}f\varphi_{ik}u^i u^k$ che avrebbe portato nel 2º membro della (6) un termine:

$$\mathrm{F}^r = f\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}\varphi_{ik}u^i u^k u^r + \varphi_i^{\;r}u^i\right) - \frac{1}{2}\varphi_{ik}^{\;\;/r}u^i u^k\right].$$

In un modo analogo si potrebbero considerare altri tipi generalizzati di forze.

c) *Particella libera in un campo gravitazionale e sotto l'azione di forze derivanti da un potenziale scalare.*

Si ha $\Phi^i = 0$ per cui $L = m_0 u_i u^i - \alpha\varphi$, e l'equazione del moto si scrive:

$$\frac{du^r}{ds} = -\left\{ {r \atop i \;\; k} \right\} u^i u^k - \frac{\alpha}{m_0}\left(\frac{d(\varphi u^r)}{ds} + \varphi^{/r}\right).$$

d) *Caso limite della relatività ristretta.*

Essendo

$$-ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - dt^2$$

le equazioni del moto diventano:

$$m_0 \frac{du_r}{ds} = eF_{rk} u^k - \alpha\left(\frac{d(\varphi u_r)}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^r}\right)$$

che si possono scrivere esplicitamente nella forma ordinaria:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = e(\mathbf{E} + \boldsymbol{v}\times\mathbf{H}) - \alpha\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) + \sqrt{1-v^2}\,\mathrm{grad}\,\varphi\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 + \alpha\varphi}{\sqrt{1-v^2}}\right) = e\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{v} + \alpha\sqrt{1-v^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Quest'ultima equazione è ovviamente una conseguenza della prima e posto

$$E_p = \frac{m_0 + \alpha\varphi}{\sqrt{1-v^2}} \qquad W = \alpha\sqrt{1-v^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + e\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{v}$$

si scrive

$$\frac{dE_p}{dt} = W$$

che esprime che la variazione temporale dell'energia $E_p$ della particella eguaglia la potenza dissipata W.

3. Nelle considerazioni precedenti si sono assunti dei campi esterni caratterizzati rispettivamente da un potenziale vettore $\Phi^i$ e da un potenziale scalare $\varphi$. Ciò non determina completamente il campo di forza, rispettivamente quello elettromagnetico e quello mesonico, da noi considerati.

Infatti dalla definizione

$$F_{ik} = \Phi_{k/i} - \Phi_{i/k}$$

discende

$$\varepsilon^{ikrl} F_{rl/k} = 0;$$

per la determinazione del campo elettromagnetico occorre aggiungere l'equazione di Maxwell

$$F^{ik}{}_{/k} = J^i$$

che esprime come il campo è legato alle sorgenti $J^i$ (cariche e correnti).

Un altro campo, caratterizzato sempre da un potenziale vettore, che per distinguerlo dal precedente lo chiameremo $A^i$, per il cui tensore emisimmetrico che indicheremo con $Y_{ik}$, tale che

$$Y_{ik} = A_{k/i} - A_{i/k},$$

valgono equazioni della particella del tipo di quelle della particella carica in un campo elettromagnetico, è il campo di Yukawa definito anziché della precedente equazione di Maxwell, dalla

$$Y^{ik}{}_{/k} = \chi^2 A^i + S^i,$$

essendo $S^i$ le sorgenti del campo.

Questo campo, che non ha nulla a vedere con la carica elettrica delle sorgenti, è stato in un primo tempo assunto da Yukawa per descrivere le forze nucleari. Dovette però essere abbandonato perché l'esperienza dimostrò che tali forze erano associate a un campo generato, come abbiamo detto, da un potenziale scalare $\varphi$ (o meglio pseudoscalare $\varphi^*$).

Analogamente a quanto fatto per il potenziale vettore $\Phi^i$, nel caso di un potenziale scalare porremo

$$\varphi_{/i} = F_i\,;$$

per avere le equazioni complete del campo mesonico occorrerà aggiungere l'equazione di Klein-Gordon

$$F^i{}_{/i} = \chi^2 \varphi + S$$

dove S è la sorgente del campo mesonico data dai nucleoni.

4. Abbiamo già avuto occasione di accennare al fatto che, a tutto rigore, il campo mesonico è (nella relatività ristretta) caratterizzato da uno pseudoscalare $\varphi^*$ e non da uno scalare $\varphi$ come invece abbiamo finora supposto.

Anche in relazione a ciò, e per l'interesse che può rivestire nella fisica delle particelle elementari, generalizzeremo pertanto la lagrangiana (1) introducendovi due altri termini, e quindi due altri campi, associati rispettivamente a un potenziale tensore (emisimmetrico) del 3° e a un potenziale tensore (emisimmetrico) del 4° ordine, e precisamente:

$$\frac{1}{3!}\,\beta\varepsilon^{ijhk}\,U_{ihk}$$

$$\frac{1}{4!}\,\gamma\varepsilon^{ijhk}\,\varphi_{ijhk}$$

essendo $\varepsilon^{i\gamma hk}$ il noto simbolo di Ricci.

Col procedimento dianzi seguito si può allora dimostrare che essi danno origine nell'equazione del moto della particella rispettivamente a un termine simile a quello associato al potenziale vettore $\Phi^i$ e a un termine simile a quello associato al potenziale scalare $\varphi$, dove però i tensori $F_{ik}$ e $F_i$ del paragrafo precedente sono sostituiti rispettivamente da

$$S_{ik} = U_{ikh}{}^{/h}$$

e

$$S_{ijh} = \varphi_{ijhk}{}^{/k}.$$

Associando queste alle equazioni che legano i tensori del campo con le sorgenti di questo, e che supporremo del tipo già assunto per gli altri campi, otteniamo così le equazioni del campo tensoriale del 3° ordine:

$$S_{ik} = U_{ikh}{}^{|h}$$

$$S_{ij|h} - S_{jh|i} + S_{hi|j} = \mu^2 U_{ijh} + Q_{ijh}$$

e quelle del campo tensoriale del quarto ordine :

$$S_{ijh} = \varphi_{ijhk}{}^{|k}$$

$$S_{ijh|k} - S_{jhk|i} + S_{hki|j} - S_{kij|h} = \nu^2 \varphi_{ijhk} + M_{ijhk}.$$

Introducendo i tensori duali $U_i^*$ e $\varphi^*$ dei tensori del 3° e del 4° ordine a cui abbiamo ora fatto ricorso per la descrizione di questi nuovi due campi, si può agevolmente dimostrare che le equazioni del campo tensoriale del 3° ordine possono scriversi in forma equivalente alle equazioni di Yukawa, mentre quelle del campo tensoriale del 4° ordine in forma equivalente a quelle del campo di Klein–Gordon.

La sola differenza è che le nuove grandezze $S_{ik}^*$ , $U_i^*$ , $Q_i^*$ per il primo campo e le $S_i^*$ , $\varphi^*$, $M^*$ per il secondo si trasformano con leggi che caratterizzano gli pseudo–tensori: ciò corrisponde a un diverso comportamento, rispetto ai tensori dei campi di Yukawa e di Klein–Gordon, solo subordinatamente a trasformazioni improprie quali ad esempio le riflessioni spaziali.

5. Ricordiamo infine come il problema di esprimere il moto di una particella nella relatività generale come moto di una singolarità dello spazio–tempo e non tramite un principio variazionale, che ne risulterebbe se mai una conseguenza, pur essendo estremamente interessante pone tuttavia, come ha sottolineato a più riprese Pauli, delle limitazioni fisiche abbastanza rilevanti. È comunque da ritenersi che, includendo come campo esterno anche il campo mesonico, sia possibile estendere a questo caso i risultati ottenuti da Einstein, Infeld e collaboratori [4] per il moto di una particella interagente col solo campo gravitazionale e quelli di Chase *et al.* [5] per il moto di una particella che, oltre che col campo gravitazionale, interagisca anche col campo elettromagnetico.

(4) A. EINSTEIN, L. INFELD e B. HOFFMAN, «Ann. of Math.», *39*, 66 (1938); A. EINSTEIN e L. INFELD, «Can Jour. of Math.», *1*, 209 (1949); L. INFELD e P. WALLACE, «Phys. Rev.», *57*, 797 (1940).

(5) D. M. CHASE, «Phys. Rev.», *95*, 243 (1954); B. BERTOTTI, «Nuovo Cimento, IX», *12*, 226 (1954); «Nuovo Cimento, X», *2*, 231 (1955).