Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Bernard Rouxel

Sur les réseaux pseudo—conjugués d'une variété spatiale bidimensionnelle immergée dans une variété lorentzienne

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.4, p. 537–540.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_537_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Geometria differenziale. — *Sur les réseaux pseudo-conjugués d'une variété spatiale bidimensionnelle immergée dans une variété lorentzienne.* Nota di BERNARD ROUXEL, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. — S'introduce in questa Nota una nozione di pseudoconiugio per varietà spaziali 2-dimensionali immerse in una varietà lorentziana V_L^{2+n}; ciò permette di caratterizzare le varietà pseudominime e pseudo-ombelicali di V_L^{2+n}.

1. V_s^2 étant une C^∞-variété spatiale 2-dimensionnelle (de métrique définie négative), soit $x : V_s^2 \to V_L^{2+n}$ une immersion de V_s^2 dans une variété lorentzienne V_L^{2+n} (de signature hyperbolique). Si $F(V_s^2)$ et $F(V_L^{2+n})$ désignent respectivement les faisceaux des repères orthonormés de V_s^2 et V_L^{2+n}, soit $B \subset V_s^2 \times F(V_s)$ le fibré principal des repères adaptés tels que les vecteurs $e_i (i, j, k = 1, 2)$ soient tangents à V_s^2 et les vecteurs $e_{i^*} (i^*, j^*, k^* = 3, 4, \cdots, n+2)$ soient normaux en $x(p)$ $(p \in V_s^2)$. On notera par $e_r (r, s, t = 1, 2, \cdots, n+1)$ les vecteurs spatiaux d'un repère quelconque $b \in B$, par $T_p(V_s^2)$ le plan tangent en p à V_s^2 et par $T_p(V_s^2)$ son complément orthogonal qui contient le vecteur temporel e_{n+2}. Si ω^i et $\omega_A^B (A, B, C = 1, 2, \cdots, n+2)$ sont les formes duales et les formes de connexion induites par x, on peut écrire

$$dp = -\omega^i \otimes e_i.$$

et V_s^2 est alors structurée par la connexion

$$\nabla e_r = \omega_r^A \otimes e_A \quad , \quad \nabla e_{n+2} = -\omega_{n+2}^r \otimes e_r.$$

où $\omega_A^B = \gamma_{Ai}^B \omega^i$. Le premier et le second groupe des équations de structure s'écrivent respectivement,

$$d\Lambda\omega^i = \omega^j \Lambda\omega_j^i \quad , \quad d\Lambda\omega_s^r = \varepsilon_A \, \omega_s^A \Lambda\omega_A^r + \Omega_r^s , \qquad (\varepsilon_r = +1 , \varepsilon_{n+2} = -1)$$

$$d\Lambda\omega_s^{n+2} = \omega_s^r \Lambda\omega_r^{n+2} + \Omega_s^{n+2}$$

où Ω_A^B sont les 2-formes de courbure.

2. Si l'on considère deux champs tangents $X = X^i e_i$ et $Y = Y^i e_i$ on sait [1] [2] qui l'on peut leur associer leur *shape operator* $S_X(Y) = S_Y(X) \subset \subset T_p(V_s^2)$ défini par

$$S_X(Y) = \sum_{k^*} \gamma_{ij}^{k^*} X^i Y^j e_{k^*}.$$

Par ailleurs, nous avons vu [3] que la condition

$$S_X(Y) = 0$$

(*) Nella seduta del 20 aprile 1974.

exprime la conjugaison sur V_s^2 des directions définies par X et Y. On est alors amené à la:

DEFINITION. *On dira que deux directions* X , Y *de* $T_p(V_s^2)$ *sont pseudo-conjuguées si*

$$\langle S_X(Y) , S_X(Y) \rangle = 0.$$

Ceci permet alors de définir des *pseudo-directions asymptotiques* et des *pseudo-directions de courbure* respectivement par

$$\langle S_X(X) , S_X(X) \rangle = 0 \quad \text{et par} \quad \langle S_X(Y) , S_X(Y) \rangle = 0 \quad , \quad \langle X , Y \rangle = 0.$$

Si l'on pose $X^2 = \lambda X'$ et $Y^2 = \mu Y'$ la condition de pseudo-conjugaison s'écrit sous la forme

$$\sum_{i^*} \varepsilon_{i^*} [\gamma_{11}^{i^*} + \gamma_{12}^{i^*}(\lambda + \mu) + \gamma_{22}^{i^*} \lambda\mu]^2 = 0 .$$

L'équation des pseudo-lignes esymptotique sera alors

$$\sum_{i^*} \varepsilon_{i^*} [\gamma_{11}^{i^*}(\omega^1)^2 + \gamma_{12}^{i^*} \omega^1 \omega^2 + \gamma_{22}^{i^*}(\omega^2)^2]^2 = 0$$

et l'équation des pseudo-lignes de courbure

$$\sum_{i^*} \varepsilon_{i^*} [\gamma_{12}^{i^*}(\gamma^1)^2(\omega^1)^2 + (\gamma_{11}^{i^*} - \gamma_{22}^{i^*}) \omega^1 \omega^2 - \gamma_{12}^{i^*}(\omega^2)^2]^2 = 0.$$

On constate que par tout point de V_s^2 passent en général 4 pseudo-lignes asymptotiques et 4 pseudo-lignes de courbure deux à deux orthogonales. [Si $n = 4$ ces courbes sont toujours réelles].

3. Désignons par H le vecteur courbure moyenne de Bompiani

$$H = (\gamma_{11}^{i^*} + \gamma_{22}^{i^*})\, e_{i^*} = S_I(J)$$

où I et J désignent les champs isotropes de $T_p(V_s^2)$. Si l'on rappelle que les V_s^2 pseudo-minimales ont été définies par R. Rosca [4] par la condition $H \neq 0$, $\| H \| = 0$, on a la

PROPOSITION. *Si* V_s^2 *est une variété genre espace immergés dans une variété lorentzienne* V_L^n *les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) V_s^2 *est pseudo-minimale*;

ii) V_s^2 *possède un réseau isotrope pseudo-conjugué*;

iii) V_s^2 *possède des pseudo-asymptotiques orthogonales* (*si* $n = 4$).

4. Il est possible de réduire à une forme plus simple les équations des pseudo-lignes de courbure et des pseudo-lignes asymptotiques en particularisant le repère *b*.

Si l'on considère les vecteurs $Z \in T_p^1(V_s^2)$ tels que

$$Z = S_X(Y) \quad , \quad \langle X , Y \rangle = 0.$$

On constate que Z engendre en général un 2 plan N_p dans lequel nous placerons deux vecteurs e_{i^*}. Nous désignerons dans ce qui suit par V_s^2 de telles variétés [ceci correspond aux V_s^2 à pseudo-lignes de courbure distinctes ou dans le cas où V_L^n est un espace de Minkowski M^4, aux V_s^2 qui ne sont pas à torsion gaussienne nulle]. On voit alors que $\forall X$, $\forall Y$, $Z = S_X(Y)$ engendre un 3-plan que nous supposerons dans la suite lorentzien.

Si N_p est un 2-plan de Minkowski engendré par e_3 et e_{n+2}, on peut alors écrire.

$$S_X(Y) = [\gamma_{11}^3 + \gamma_{12}^3(\lambda + \mu) + \gamma_{22}^3 \lambda\mu]\, e_3 +$$
$$+ [\gamma_{11}^{n+2} + \gamma_{12}^{n+2}(\lambda + \mu) + \gamma_{22}^{n+2} \lambda\mu]\, e_{n+2} + \gamma_{11}^4 [1 + \lambda\mu]\, e_4,$$

où l'on a $\gamma_{11}^4 = \gamma_{22}^4$, $\gamma_{12}^4 = \gamma_{12}^5 \cdots = \gamma_{12}^{n+1} = \gamma_{11}^5 = \cdots = \gamma_{11}^{n+1} = \gamma_{22}^5 = \cdots = \gamma_{22}^{n+1} = 0$. On voit que l'on peut écrire de façon intrinsèque

$$H = K + L$$

avec $$K = (\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3)\, e_3 + (\gamma_{11}^{n+2} + \gamma_{22}^{n+2})\, e_{n+2} \quad , \quad L = 2\gamma_{11}^4\, e_4 .$$

Nous appellerons L composante pseudo-ombilicale du vecteur de Bompiani, ceci étant justifié par la proposition suivante:

Toute V_s^2 *est pseudo-ombilicale dans la direction de* L.

Par ailleurs rappelant [5] qu'un V_s^2 est dite pseudo-ombilicale si la deuxième forme quadratique moyenne II est telle que

$$II = \rho \langle dp, dp \rangle$$

on établit aisément la

PROPOSITION. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une* V_2^s *soit pseudo-ombilicale est que*

$$\langle S_I(I), H \rangle = \langle S_I(I), K \rangle = 0.$$

5. Considérons le cas où V_L^n est un espace de Minkowski M^n.

a) On peut établir la

PROPOSITION. *Si* V_s^2 *désigne une variété 2-dimensionnelle spatiale d'un espace de Minkowski les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) V_s^2 *est une variété de Cartan.*

ii) *La composante pseudo-ombilicale de* H *est nulle.*

b) On sait que si l'on fait décrire à p une courbe d'un réseau conjugué de V_s^2 les tangentes en p aux autres courbes du réseau engendrent une développable. Si l'on fait décrire à p une courbe d'un réseau pseudo-conjugé les tangentes Δ n'engendrent pas en général de développable; désignons par $\Pi(\Delta)$ le 3-plan défini par Δ et une génératrice voisine, on a alors la propriété suivante: *le réseau est pseudo–conjugué si et seulement si les 3–plans* $\Pi(\Delta)$ *sont isotropes de défaut* 1.

On peut de même caractériser les pseudo–lignes asymptotiques par la propriété suivante leur *2–plan osculateur en p et le plan tangent en p à* V_s^2 *engendrent un 3–plan isotrope de défaut* 1.

On peut ailleurs montrer au moyen de la représentation hyperspatiale de P. Vincensini [6] [7] *que les pseudo–lignes de courbure des* V_s^2 *de* M^4 *correspondent aux réglées symptotiques des congruences de droites de* P^3.

c) Si l'on étend à une $V_s^2 \subset M^n$ les notions de T. K. Pan [8] concernant la *courbure normale* d'un champ tangent par rapport à une courbe C de V_s^2, on est amené à définir les directions pseudo–asymptotiques d'un champ de vecteur comme des directions par rapport auxquelles le vecteur courbure normale du champ est de module nul (sans être nécessairement nul). On peut alors énoncer le résultat suivant conforme aux propriétés établies par T. K. Pan [8].

Les pseudo–asymptotiques d'un champ de vecteur tangent à une V_s^2 *forment un réseau pseudo–conjugué avec les courbes du champ.*

Conformént à un résultat établi par R. Rosca dans le cas d'un espace elliptique P_e^n [9] on peut également établir que:

Si les pseudo–asymptotiques d'un champ isotrope V, *tangent à une* V_s^2, *sont constituées par les courbes isotropes de* V_s^2 *non tangentes à* V, *alors* V_s^2 *est pseudo–minimale.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] O'NEILL (1970) – *Elementary differential geometry*. New York.

[2] ŌTSUKI T. (1970) – *On principal normal vector field of submanifolds in a Riemannian manifold of constant curvature*, « Journ. Math. Japan », *22*, 1.

[3] ROSCA R., ROUXEL R. et VANHECKE L. (1972) – *Sur des variétés lorentziennes pseudo–isotropiquement immergées dans un espace de Minkowski*, « Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Instamboul », ser. A, *37*.

[4] ROSCA R. (1972) – *Varietati izotrope si pseudo–isotrope incluse intr–o varietate relativista*, Bucarest.

[5] OBATA M. (1968) – *The gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature*, « J. diff. geometry », *2*.

[6] VINCENSINI P. (1965) – *Sur une représentation quadridimensionnelle ponctuelle de l'espace réglé à trois dimensions*, « Annali di Matematica », ser. IV, *70*.

[7] ROUXEL B. (1972) – *Sur certaines variétés* V^2 *2–dimensionnelles d'un espace–temps de Minkowski*, « C. R. Ac. Sc. Paris », sér. A, *274*.

[8] PAN T. K. (1952) – *Normal curvature of a vector field*, « American J. of Math. », *74*, 4.

[9] ROSCA R. (1969) – *Sur les variétés minimales* V^2 *de E. Cartan dans un espace elliptique à n dimensions*, « C. R. Sciences Paris ». *268*.