
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

IDA CATTANEO GASPARINI, GIUSEPPE DE CECCO

Algebra di Lie e curvature p-sezionali di uno spazio omogeneo compatto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 56 (1974), n.4, p. 526–529.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_526_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Algebra di Lie e curvature p -sezionali di uno spazio omogeneo compatto* (*). Nota di IDA CATTANEO GASPARINI e GIUSEPPE DE CECCO, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI

SUMMARY. — A sufficient condition is given so that the p -sectional curvature and Pontrjagin classes of a compact homogeneous space G/H be null (p , even number; n , dimension of G/H ; $0 < p \leq n$).

J. A. Thorpe seguendo Allendoerfer [1] definisce una funzione differenziabile γ_p nel fibrato Grassmanniano $G_p(M)$ dei p -piani tangenti ad M , detta *p -esima curvatura sezionale* di M , dove M è una varietà differenziabile, riemanniana, paracompatta e connessa.

Per ogni p -piano $(x, \alpha) \in G_p(M)$ (con p pari $\leq n = \dim M$), $\gamma_p(x, \alpha)$ denota la curvatura di Lipschitz-Killing in x della sottovarietà p -dimensionale di M , geodetica in x e tangente in x ad α . Per $p = 2$ essa si riduce alla classica curvatura gaussiana.

Nel lavoro [7] Thorpe dimostra che se M è una varietà riemanniana compatta orientabile con curvatura p -sezionale costante per qualche p , allora sono nulle le k -esime classi di Pontrjagin di M per $k \geq p/2$.

Noi prenderemo in considerazione una varietà omogenea G/H ed esprimeremo l'annullarsi di certe classi di Pontrjagin con l'esistenza di elementi di « stabilità » nell'algebra di Lie di G . Più precisamente dimostreremo

TEOREMA A. *Sia $M = G/H$ uno spazio omogeneo orientabile con G gruppo di Lie connesso e compatto e H un suo sottogruppo chiuso. Siano poi $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ le algebre di Lie di G e di H e m il sottospazio supplementare ed ortogonale ad $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ secondo una metrica invariante introdotta in $\mathfrak{g}$. Detta n la dimensione di m , se ivi esistono $n - p + 1$ elementi indipendenti di stabilità, allora la curvatura q -sezionale γ_q di M è identicamente nulla per ogni $q \geq p$ (con p, q interi pari e $0 > p, q \leq n$).*

Dal risultato di Thorpe citato segue poi:

COROLLARIO A. *Nelle ipotesi del teorema precedente sono nulle tutte le classi di Pontrjagin $P_k(M)$ di M per $k \geq p/2$.*

Se lo spazio omogeneo considerato è simmetrico, si ha

TEOREMA B. *Sia G/H uno spazio simmetrico orientabile con G gruppo di Lie compatto e connesso ed H un suo sottogruppo chiuso. Siano poi $\mathfrak{g}$ ed $\mathfrak{h}$ le algebre di Lie di G e H e m il sottospazio supplementare ed ortogonale ad $\mathfrak{h}$*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Ricerca sulle strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni.

(**) Nella seduta del 20 aprile 1974.

in $\mathfrak{g}$ secondo una metrica invariante. Se il centralizzatore di $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{g}$ ammette $n - p + 1$ elementi indipendenti, allora la curvatura q -sezionale γ_q di M è identicamente nulla per ogni $q \geq p$ (con p, q interi pari e $0 > p, q \leq n$).

COROLLARIO B. Nelle ipotesi del teorema precedente sono nulle tutte le classi di Pontrjagin $P_k(M)$ di M per $k \geq p/2$.

I Teoremi A e B sono estensioni di due teoremi dimostrati in [4] dove è stato messo in relazione l'annullarsi della n -esima curvatura sezionale di uno spazio omogeneo di dimensione pari e quindi della caratteristica di Eulero-Poincaré con l'esistenza di un elemento di stabilità per $\mathfrak{m}$.

1. Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso ed H un suo sottogruppo chiuso. È noto che lo spazio quoziente $M = G/H$ si può dotare di una metrica riemanniana invariante per G .

Siano $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ le algebre di Lie di G e di H e sia $\langle, \rangle$ un qualunque prodotto scalare su $\mathfrak{g}$ di forma quadratica positiva. A partire da $\langle, \rangle$ si definisce un nuovo prodotto scalare $(,)$ invariante per $\text{ad}(H)$ mediante la posizione

$$(X, Y) = \int \langle \text{ad}(h) X, \text{ad}(h) Y \rangle dh$$

con dh misura di Haar su H e X, Y elementi arbitrari di $\mathfrak{g}$.

Indichiamo con $\mathfrak{m}$ il sottospazio di $\mathfrak{g}$ supplementare ed ortogonale ad $\mathfrak{h}$ secondo questo prodotto scalare: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m} = 0$. Poiché $\text{ad}(H)$ lascia invariato il sottospazio $\mathfrak{h}$, lascia invariato anche il sottospazio $\mathfrak{m}$, si ha cioè $\text{ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Lo spazio M viene così ad avere una struttura di spazio omogeneo riduttivo [6].

Se π_* è il differenziale dell'applicazione $\pi: G \rightarrow G/H$ si ha $\text{Ker } \pi_* = T_e(H)$ e $\mathfrak{m}$ può essere identificato, mediante l'applicazione π_* con $T_{x_0}(M)$ dove $x_0 = \pi e$. Consideriamo ora la restrizione del prodotto scalare $(,)$ a $\mathfrak{m}$. L'identificazione di $\mathfrak{m}$ con $T_{x_0}(M)$ induce su $T_{x_0}(M)$ un prodotto scalare invariante per il gruppo lineare d'isotropia $\tilde{H}$. Mediante le trasformazioni $\tau_k (k \in G)$ di G operanti su M si definisce allora sulla varietà M una metrica riemanniana invariante per G .

2. Consideriamo ora una base $\{X_s\}$ di $\mathfrak{m}$ ($s = 1, 2, \dots, n = \dim \mathfrak{m}$) e indichiamo con $\{\tilde{X}_s(x) = \pi_* X_s\}$ la base corrispondente di $\mathfrak{M}$, modulo delle trasformazioni infinitesimali di U_{x_0} , intorno di x_0 in M .

Se $Z = Z^s X_s$ è un vettore di $\mathfrak{m}$, consideriamo l'operatore introdotto in [3].

$$\theta_Z = Z^s L_{\tilde{X}_s}$$

ove $L_{\tilde{X}_s}$ è la derivata di Lie in x_0 rispetto al campo $\tilde{X}_s$. θ_Z è un operatore di connessione invariante per G e definito globalmente su M .

θ_Z è ben definito su G/H poiché una trasformazione τ_h con $h \in H$ induce una trasformazione a coefficienti costanti sui campi $\{\tilde{X}_s\}$ e quindi non altera il valore di θ_Z (cfr. [5]).

Indichiamo con $R(x_0, \Sigma)$ la curvatura sezionale in x_0 secondo un 2-piano Σ appartenente allo spazio tangente a M in x_0 . Se $\tilde{X}, \tilde{Y}$ sono i due campi di vettori indotti da due vettori X, Y di m , individuanti nel punto x_0 il 2-piano Σ si ha

$$(1) \quad R(x_0, \Sigma) = R(x_0, \tilde{X}, \tilde{Y}) = -L_{[X, Y]_0}.$$

A causa dell'invarianza di θ , essa è invariante per G .

3. *Dimostrazione del Teorema A.* Aggiungiamo ora l'ipotesi che M sia orientabile. Ad ogni p -piano α (con p intero pari a $0 < p \leq n = \dim M$), associamo la p -esima curvatura sezionale di M . Se α è un p -piano in $x_0 \in M$, la curvatura sezionale in x_0 , in termini del tensore di curvatura, è data da (cfr. [7])

$$(2) \quad \gamma_p(x_0, \alpha) = \frac{(-1)^{p/2}}{2^{p/2} p!} \Sigma \epsilon_{i_1 \dots i_p} \epsilon_{j_1 \dots j_p} (R(X_{i_1}, X_{i_2}) X_{j_1}, X_{j_2}) \dots \\ \dots (R(X_{i_{p-1}}, X_{i_p}) X_{j_{p-1}}, X_{j_p})$$

dove la somma è estesa a tutte le permutazioni dell'insieme $\{1, \dots, p\}$ e dove $X_1, \dots, X_p$ è una base ortonormale in m del p -piano α .

Tenendo conto della relazione (1), per valori generici r, s, t, u si ha

$$(3) \quad (R(X_r, X_s) X_t, X_u) = - (L_{[X_r, X_s]_0} X_t, X_u).$$

Diremo che un elemento non nullo X di m è *stabile* se

$$(4) \quad X \in m \cap N_g(m)$$

essendo $N_g(m)$ il normalizzatore di m in g . Se X , elemento di stabilità di m , è anche uno dei vettori della base di α allora, poiché in ogni termine della somma (2) compare un fattore del tipo (3), tenuto conto di (4) segue $\gamma_p(x, \alpha) = 0$ per il fissato piano α .

Vogliamo ora trovare qual è il minimo numero di vettori stabili appartenenti alla base $\{X_s\}$ di m affinché $\gamma_p(x, \alpha) = 0$ per ogni p -piano α tangente ad M e passante per x_0 . Il numero di tali p -piani è $\binom{n}{p}$. Le p -uple che contengono il vettore X_r e non contengono i vettori $X_1, \dots, X_{r-1}$ sono $\binom{n-r}{p-1}$. Si vede facilmente che per $t = n - p + 1$ si ha

$$(5) \quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \dots + \binom{n-t}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

Infatti per una nota relazione

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \\ + \binom{n-1}{p-1} = \dots = \binom{n-n+p}{p} + \binom{p}{p-1} + \dots + \binom{n-1}{p-1}$$

da cui la conclusione.

Quindi se in m esistono $n - p + 1$ elementi di stabilità si ha $\gamma_p(x, \alpha) = 0$ per ogni p -piano α tangente ad M e passante per x_0 . Essendo la (2) invariante per G segue che γ_p è identicamente nulla su M . Ciò implica che γ_q è identicamente nulla per ogni q pari $\geq p$.

4. *Dimostrazione del Teorema B.* La dimostrazione si riconduce al teorema precedente poiché nel caso che G/H sia simmetrico si vede che il centralizzatore C di m in $\mathfrak{g}$ è contenuto in m , e quindi per la nostra ipotesi in m esistono $n - p + 1$ elementi di stabilità.

Infatti C è un ideale di $\mathfrak{g}$, come pure $C \cap \mathfrak{h}$ poiché

$$[m, C \cap \mathfrak{h}] \subset [m, C] = 0$$

per definizione di C e

$$[\mathfrak{h}, C \cap \mathfrak{h}] \subset C \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset C \cap \mathfrak{h},$$

dalle quali consegue $[\mathfrak{g}, C \cap \mathfrak{h}] \subset C \cap \mathfrak{h}$.

D'altra parte non vi sono ideali di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ poiché in uno spazio simmetrico vale $[m, \mathfrak{h}] \subset m$; da qui si conclude che $C \cap \mathfrak{h} = 0$ da cui $C \subset m$ come si voleva dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALLENDOERFER C. B., *Global theorems in Riemannian geometry*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 54, 249-259 (1948).
- [2] CATTANEO GASPARINI I., *Operatori intrinseci di derivazione su una varietà parallelizzabile*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 46 (6), 682-685 (1969).
- [3] CATTANEO GASPARINI I., *Introduction d'une différentiation totale de Lie sur un espace homogène réductif*, « C. R. Acad. Sc. Paris », 272, 1192-1194 (1971).
- [4] CATTANEO GASPARINI I., *Algebra di Lie e caratteristica χ di uno spazio omogeneo compatto*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 54 (3), 406-411 (1973).
- [5] CATTANEO GASPARINI I., *Relazioni tra proprietà algebriche e proprietà topologiche negli spazi omogenei di Lie*. Seminari dell'Istituto Matematico della Università di Bari, Gennaio 1974.
- [6] LICHNEROWICZ A., *Géométrie des Groupes de transformations*, Dunod, Paris 1968.
- [7] THORPE J. A., *Sectional Curvatures and Characteristic Classes*, « Ann. of Math. », 80, 429-443 (1964).
- [8] WOLF J., *Spaces of Constant Curvature*, McGraw Hill, New York 1967.