Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giampaolo Menichetti

q-Archi completi nei piani di Hall di ordine $q = 2^k$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.4, p. 518–525.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_518_0>

Geometria. — *q–Archi completi nei piani di Hall di ordine $q = 2^k$* (*). Nota di GIAMPAOLO MENICHETTI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Main theorem: In every projective plane of Marshall Hall of order $q = 2^k$ $(k \geq 4)$ there are complete q–arcs.

In un piano proiettivo, π, di ordine finito, si definisce ν–arco ogni insieme, Γ, di ν punti distinti per cui è soddisfatta la seguente proprietà:

P) una retta di π contiene al più due punti distinti di Γ.

Un ν–arco, Γ, si dice completo se non è possibile aggiungere alcun punto a Γ senza perdere la proprietà P).

In un articolo del 1966 (cfr. [1]), A. Barlotti aveva posto la questione di stabilire se in ogni piano non desarguesiano di ordine q esistano o meno q–archi completi; ciò in relazione con un teorema, ormai classico, di B. Segre e G. Tallini, il quale afferma che

In un piano desarguesiano finito di ordine q non esistono q–archi completi.

Ricollegandomi a tale questione, nella presente Nota ho dimostrato l'esistenza di q–archi completi in ogni piano di Hall di ordine $q = 2^k$, $k \geq 4$.

1. Sia $K = GF(q')$ un campo di Galois di ordine $q' = 2^h$, $h \geq 2$. Un elemento $s \in K$ si dice di prima (rispettivamente seconda) categoria se il polinomio

$$f(x) = x^2 + x + s \tag{1}$$

è riducibile (irriducibile) in $K[x]$.

Si dimostra (cfr. [5], p. 104) la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Gli elementi di prima categoria costituiscono un sottomodulo di K^+, di ordine $q'/2$; inoltre la somma di due elementi di ugual categoria è un elemento di prima categoria, mentre la somma di due elementi di categorie diverse è di seconda categoria.*

Ne segue il

COROLLARIO 1.1. *Sia* (1) *irriducibile in* $K[x]$. *Un polinomio* $g(x) = x^2 + a_1 x + a_0$, $a_i \in K$, *è irriducibile in* $K[x]$ *se e solo se* $a_1 \neq 0$ *e* $a_0 = a_1^2 f(u)$, $u \in K$.

Dimostrazione. Preliminarmente si prova che $g'(x) = x^2 + x + b_0$, $b_0 \in K$, è irriducibile se e solo se $b_0 = f(u)$, $u \in K$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del «Gruppo nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni» del C.N.R. (Sezione n. 4).

(**) Nella seduta del 20 aprile 1974.

$b_0 = f(u)$ implica $g'(x) = f(x+u)$ e, quindi, $g'(x)$ irriducibile in $K[x]$. Se, viceversa, supponiamo $g'(x)$ irriducibile, allora s e b_0 sono elementi di seconda categoria: quindi $g''(x) = x^2 + x + s + b_0$ è riducibile ed esiste $u \in K$ tale che $g''(u) = f(u) + b_0 = 0$.

Dopo queste osservazioni la tesi è immediata: basta infatti rilevare che, nell'ipotesi $a_1 = 0$, $g(x) = (x + \sqrt{a_0})^2$, mentre se $a_1 \neq 0$, è $g(x) = a_1^2 [(x a_1^{-1})^2 + x a_1^{-1} + a_0 a_1^{-2}]$.

Con $H = H(q', f)$ indichiamo il quasicorpo di Hall di ordine $q = q'^2$, associato ad un polinomio (1) irriducibile in $K[x]$. Per definizione $H(q', f)$ è (cfr. [5], p. 420) la struttura algebrica $\langle \mathscr{A}, \cdot \rangle$ dove $\mathscr{A}$ è il gruppo abeliano $K^+ \oplus K^+$ (i cui elementi vengono qui indicati con $a + ib$, $a, b \in K$) e «·» denota il prodotto in $\mathscr{A}$ definito come segue:

$$(2) \qquad (a+ib)(a'+ib') = \begin{cases} aa' + iab' & , \quad b = 0 \\ aa' + b^{-1} b' f(a) + i(ba' + (1+a) b') , & b \neq 0. \end{cases}$$

Il nucleo $\mathscr{N} = \{a + ib \in H : b = 0\}$ di H è isomorfo a K e nel seguito verrà identificato con questo.

A indica il piano affine sul quasicorpo H: le coppie ordinate $(x_1, x_2) \in H \times H$ sono i punti di **A**, gli insiemi di punti le cui coordinate soddisfano una equazione del tipo $x_2 = m x_1 + n$, $m, n \in H$, oppure $x_1 = c$, $c \in H$, ne costituiscono le rette (cfr. [5], p. 382).

Come H contiene un sottocampo, $\mathscr{N}$, isomorfo a K, così **A** contiene un subpiano $\bar{\mathbf{A}}$ isomorfo al piano affine $\mathbf{A}' = \mathbf{A}(q')$ su K. Nel seguito per semplicità, identificheremo $\bar{\mathbf{A}}$ con $\mathbf{A}'$.

Come è noto, con l'aggiunta di $q + 1$ punti $(q = q'^2)$ e di una retta (*retta impropria*) ed estendendo opportunamente la relazione di incidenza, si può completare **A** in modo da ottenere un piano di traslazione **P** (*piano di Hall*). Indicheremo con (m) il *punto improprio* di **P** corrispondente al fascio di rette parallele $x_2 = m x_1 + n$ e con (∞) quello delle rette $x_1 = c$.

Osserviamo per concludere, che l'ampliamento di **A** in **P** induce l'ampliamento di $\mathbf{A}'$ nel piano proiettivo desarguesiano $\mathbf{P}' = \mathbf{P}(q') \subset \mathbf{P}$, di ordine q'.

2. Nel subpiano $\mathbf{A}'$ si considerano le parabole γ_v, $v \in K$, di equazione

$$(3) \qquad F_v(x_1, x_2) = x_2^2 + x_1 + x_2 + v^2 [(x_1 + (1+s) s^{-1} x_2)^2 + x_1 + (1+s) s^{-1} x_2 + s^2] = 0,$$

le quali, mediante l'aggiunta del punto improprio $(m(v))$,

$$(4) \qquad m(v) = \begin{cases} vs(s + v(1+s))^{-1}, & v \neq s(1+s)^{-1} \text{ (1)} \\ \infty & , \quad v = s(1+s)^{-1}, \end{cases}$$

(1) $s \neq 1$ perché 1 è di prima categoria in ogni campo $GF(q')$ di ordine $q' = 2^h > 2$.

si prolungano in coniche $\gamma'_v \in \mathbf{P}'$, tangenti la retta impropria, il cui nucleo è $(m'(v))$,

$$m'(v) = \begin{cases} s(1+v^2)(s+v^2(1+s))^{-1}, & v \neq \sqrt{s}(1+\sqrt{s})^{-1} \\ \infty & , \ v = \sqrt{s}(1+\sqrt{s})^{-1}. \end{cases} \tag{5}$$

Essendo $m(v) \neq m'(v)$, $\forall v \in K$, la conica γ'_v non può contenere il proprio nucleo ed è quindi non degenere (cfr. [6], p. 135).

Le γ_v appartengono ad un medesimo fascio di cui fa parte anche la parabola γ_∞ di equazione $F_\infty(x_1, x_2) = (x_1 + (1+s)s^{-1}x_2)^2 + x_1 + (1+s)s^{-1}x_2 + s^2 = 0$, la quale è chiaramente degenere in due rette parallele con il punto improprio in $S = (s(s+1)^{-1})$. Osservato che il polinomio $x^2 + x - s^2 = x^2 + x + f(s)$ è irriducibile in $K[x]$ (cfr. Coroll. 1.1), possiamo aggiungere che tali rette sono coniugate in una estensione quadratica di K e, quindi, prive di punti in $\mathbf{A}'$.

In quanto appartengono ad un fascio che non ha punti base in $\mathbf{A}'$, le parabole γ_v sono a due a due prive di punti comuni; inoltre, essendo $F_\infty(x_1, x_2) \neq 0$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{A}'$, per ogni punto di $\mathbf{A}'$ ne passa una.

Possiamo riassumere dicendo che $\{\gamma_v : v \in K\}$ *costituisce una fibrazione del subpiano* $\mathbf{A}'$ *mediante* q'*–archi.*

Le funzioni di $u \in K$

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= (v+1)\,x_2(u, v) + v^2 f(u) \\ x_2(u, v) &= v\,[(v^2+1)\,f(u) + (u^2+1)]\,(v^2 + vs^{-1} + s^{-2}f(s))^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

danno, come si può verificare, una parametrizzazione di γ_v per ogni $v \neq 0$. Nel seguito indicheremo con P_{uv}, $u \in K$, $v \in K - \{0\} := K_0$, il punto (appartenente a γ_v) di coordinate (6).

La traslazione $T_v : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, $v \in K$, di equazioni

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + it_1(v) \quad , \quad x'_2 = x_2 + it_2(v), \\ t_1(v) &= (v+1)\,t_2(v) \quad , \quad t_2(v) = vs^{-1}(v^2 + vs^{-1} + s^{-2}f(s))^{-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

porta γ_v nel q'–arco $T_v(\gamma_v) = \{T_v(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \gamma_v\}$; in particolare, essendo $T_0 = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$, $T_0(\gamma_0) = \gamma_0$.

Per dimostrare che $\Gamma = \bigcup_{v \in K} T_v(\gamma_v)$ è un q–arco completo $(q = q'^2)$, è utile l'esame preliminare di alcune proprietà delle parabole $\sigma_{uvv'} \in \mathbf{A}'$ la cui equazione

$$x_2^2 + x_1 + x_2 + v'v^{-1}[x_2^2 + vx_2 + v^2 f(u)] = 0, \tag{8}$$

dipende dai parametri $u, v' \in K$ e $v \in K_0$.

$\sigma_{uvv'}$ ha il discriminante uguale ad $1 + v'v^{-1}$ ed è, quindi, degenere se e solo se $v' = v \in K_0$ (cfr. [6], p. 135): in tal caso coincide con la retta r_{uv} di equazione

$$x_1 + (1+v)\,x_2 + v^2 f(u) = 0, \qquad u \in K, \quad v \in K_0. \tag{9}$$

Osserviamo inoltre che σ_{uv0} coincide con γ_0 qualunque siano $u \in K$ e $v \in K_0$.

Dimostriamo ora le Proposizioni seguenti:

PROPOSIZIONE 2. *Le rette r_{uv} di equazione* (9) *sono tutte e sole le rette del subpiano* $\mathbf{A}'$, *esterne a* γ_0.

Dimostrazione. Le rette di $\mathbf{A}'$, il cui punto improprio coincide col punto improprio, (0), oppure col nucleo, (1), di γ_0 (cfr. (4) e (5)), sono incidenti γ_0 in un punto; delle rimanenti, la cui equazione può scriversi $x_1 = (v+1)\,x_2 + w$, $v \in K_0$, $w \in K$, quelle esterne a γ_0 si trovano per $w = v^2 f(u)$, $u \in K$ (cfr. Coroll. 1.1).

PROPOSIZIONE 3. *Comunque siano prefissati* $u \in K$ *e* $v \in K_0$, *l'insieme* $\{\sigma_{uvv'} : v' \in K\}$, *di cui fanno parte* γ_0 *e la retta* r_{uv}, *costituisce una fibrazione del subpiano* $\mathbf{A}'$.

Dimostrazione. Le $\sigma_{uvv'}$ non hanno a due a due punti comuni perché appartengono ad un fascio privo di punti base in $\mathbf{A}'$ (cfr. Prop. 2). In virtù del Coroll. 1.1, $x_2^2 + vx_2 + v^2 f(u) \neq 0$, $\forall x_2 \in K$, onde (cfr. (8)) per ogni punto $(x_1, x_2) \in \mathbf{A}'$ passa almeno una di tali curve.

Si può verificare che le funzioni di $u' \in K$

$$\begin{aligned} x_1(u, v, u', v') &= vv'(vf(u) + v'f(u') + u + u')(v+v')^{-1} \\ x_2(u, v, u', v') &= vv'(u+u')(v+v')^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

parametrizzano $\sigma_{uvv'}$, qualunque siano $u \in K$ e $v, v' \in K_0$, $v \neq v'$; siccome poi risultano simmetriche negli argomenti u, u' e v, v', esse danno anche una parametrizzazione mediante u', di $\sigma_{u'v'v}$. Di qui e dalla Prop. 3 segue che il punto $P_{uvu'v'}$ di coordinate (10) (con $u, u' \in K$, $v, v' \in K_0$, $v \neq v'$), in quanto appartiene sia a $\sigma_{uvv'}$ che a $\sigma_{u'v'v}$, è esterno tanto a γ_0 che alle rette $r_{uv}, r_{u'v'}$.

Fissati $u, u' \in K$ e $v, v' \in K_0$, $v \neq v'$, restano determinati con $P_{uvu'v'}$ anche i punti $T_v(P_{uv}) \in T_v(\gamma_v)$ e $T_{v'}(P_{u'v'}) \in T_{v'}(\gamma_{v'})$; la relazione geometrica che sussiste fra questi punti è precisata dal seguente

LEMMA 4.1. *Qualunque siano* $u, u' \in K$ *e* $v, v' \in K_0$, $v \neq v'$, *il punto* $P_{uvu'v'}$ *appartiene alla retta* $r_{uvu'v'}$ *congiungente* $T_v(P_{uv})$ *con* $T_{v'}(P_{u'v'})$.

Dimostrazione. Le coordinate di $T_v(P_{uv})$ e $T_{v'}(P_{u'v'})$ sono $x_j(u, v) + it_j(v)$ e $x_j(u', v') + it_j(v')$, $j = 1, 2$, rispettivamente (cfr. (6) e (7)); l'equazione della retta, r_m, per $P_{uvu'v'}$ e per il punto improprio (m), $m \in H$, è

$$x_2 + x_2(u, v, u', v') = m(x_1 + x_1(u, v, u', v')).$$

La r_m è incidente il punto $T_v(P_{uv})$ se e solo se m risolve l'equazione

$$\begin{aligned} x_2(u, v) + x_2(u, v, u', v') + it_2(v) &= \\ = m\,[x_1(u, v) + x_1(u, v, u', v') + it_1(v)] \end{aligned} \tag{*}$$

cioè, tenuto conto di (2) [2], se e solo se $m = m_1 + im_2$, con

$$m_1 = (sc_1 d_1 + c_2 d_1 + c_2 d_2)(c_1 d_2 + c_2 d_1)^{-1}$$
$$m_2 = (sd_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)(c_1 d_2 + c_2 d_1)^{-1}$$

e $c_j = x_j(u, v) + x_j(u', v')$, $d_j = t_j(v) + t_j(v')$, $j = 1, 2$.

La retta r_m è incidente $T_{v'}(P_{u'v'})$ se e solo se m è radice dell'equazione

$$(*)' \qquad \begin{aligned} & x_2(u', v') + x_2(u, v, u', v') + it_2(v') = \\ & = mx_1(u', v') + x_1(u, v, u', v') + it_1(v'), \end{aligned}$$

formalmente deducibile da $(*)$ permutando u con u' e v con v'.

Essendo la soluzione $m_1 + im_2$ di $(*)$ una funzione simmetrica di u, u' e v, v' (perché tali sono evidentemente c_j e d_j), essa coincide con la soluzione di $(*)'$; onde le rette congiungenti $P_{uvu'v'}$, con $T_v(P_{uv})$ e $T_{v'}(P_{u'v'})$ sono anche esse coincidenti.

LEMMA 4.2. *Qualunque siano $u \in K$ e $v \in K_0$, il punto $T_v(P_{uv})$ è esterno ad $\mathbf{A}'$ ed appartiene alla retta r_{uv} di equazione (9). Tale retta, congiungente $T_v(P_{uv})$ con $T_v(P_{u+1\,v})$, è l'unica retta del subpiano $\mathbf{A}'$ che sia incidente $T_v(P_{uv})$.*

Dimostrazione. $t_2(v) \neq 0$, $\forall v \in K_0$, e pertanto (cfr. (7)), la traslazione T_v porta un qualunque punto di $\mathbf{A}'$ (nel nostro caso P_{uv}) in un punto che appartiene ad $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$.

Le coordinate di P_{uv} sono $x_1(u, v) + it_1(u, v) = (v + 1)[x_2(u, v) + it_2(v)] + v^2 f(u)$, $x_2(u, v) + it_2(v)$ (cfr. (6) e (7)) e soddisfano evidentemente l'equazione (9) di r_{uv}. Questa retta è l'unica del subpiano $\mathbf{A}'$ che sia incidente $T_v(P_{uv})$ perché $T_v(P_{uv}) \notin \mathbf{A}'$.

Essendo $f(u + 1) = f(u)$, è anche $r_{u+1\,v} = r_{uv}$ (cfr. (9)): quindi $P_{u+1\,v} \in r_{uv}$.

LEMMA 4.3. *I q'-archi $T_v(\gamma_v)$, $v \in K$, sono a due a due privi di punti comuni. Il punto improprio, (m), della congiungente due punti distinti $P \in T_v(\gamma_v)$ e $P' \in T_{v'}(\gamma_{v'})$ appartiene oppure è esterno a $\mathbf{P}'$ secondo che sia $v' = v$ oppure $v' \neq v$, $v, v' \in K$.*

Dimostrazione. $T_0(\gamma_0) \cap T_v(\gamma_v) = \varnothing$, $\forall v \in K_0$, perché $T_0(\gamma_0) = \gamma_0$ appartiene ad $\mathbf{A}'$ mentre $T_v(\gamma_v)$ ne è esterno (cfr. Lemma 4.2).

Siano $T_v(P_{uv}) \in T_v(\gamma_v)$ e $T_{v'}(P_{u'v'}) \in T_{v'}(\gamma_{v'})$, $v, v' \in K_0$, $v \neq v'$. In virtù del Lemma 4.2, $T_v(P_{uv}) \in r_{uv}$, $T_{v'}(P_{u'v'}) \in r_{u'v'}$ e, dall'ipotesi, $r_{uv} \neq r_{u'v'}$; poiché $r_{uv} \cap r_{u'v'}$ appartiene ad $\mathbf{A}'$, necessariamente i punti $T_v(P_{uv})$ e $T_{v'}(P_{u'v'})$ sono distinti (cfr. ancora il Lemma 4.2): quindi $T_v(\gamma_v) \cap T_{v'}(\gamma_{v'}) = \varnothing$, $\forall v, v' \in K_0$, $v \neq v'$.

Dimostriamo ora la seconda parte dell'enunciato.

Se $v' = v$, allora PP' è la corrispondente, nella traslazione T_v, di una retta secante γ_v ed è, quindi, ad essa parallela: onde $(m) \in \mathbf{P}'$.

Nell'ipotesi $v' \neq v$ uno almeno degli elementi v, v' appartiene a K_0: supponiamo, per fissare le idee, $v \in K_0$ ovvero $P = T_v(P_{uv})$. La retta PP'

(2) I calcoli, un po' laboriosi, non presentano particolari difficoltà e si sono omessi.

è allora incidente almeno un punto di $\mathbf{A}'$ esterno ad r_{uv}: il punto $P_{uvu'v'}$ se $P' = T_{v'}(P_{u'v'})$ (cioè se $v' \neq 0$), il punto P' se $v' = 0$. In entrambi i casi $(m) \notin \mathbf{P}'$ perché altrimenti $T_v(P_{uv})$ sarebbe incidente due rette distinte di $\mathbf{A}'$ (cfr. Lemma 4.2).

PROPOSIZIONE 4. $\Gamma = \bigcup_{v \in K} T_v(\gamma_v)$ *è un q-arco* (3).

Dimostrazione. Proveremo la tesi mostrando che le rette congiungenti un qualunque punto $P \in \Gamma$ con i rimanenti $q - 1$ punti distinti di Γ sono a due a due distinte. Per comodità si considerano separatamente il caso, I, in cui $P = T_v(P_{uv}) \in T_v(\gamma_v)$, $v \in K_0$, ed il caso, II, in cui si suppone $P \in \gamma_0 = T_0(\gamma_0)$.

I) Le rette congiungenti P con gli altri punti di Γ si ripartiscono in tre classi, $\mathscr{C}_j$, $j = 1, 2, 3$, definite nel modo seguente:

$\mathscr{C}_1$ è l'insieme delle rette, $r_{u'}$, congiungenti P con i punti $T_v(P_{u'v}) \in T_v(\gamma_v)$, $u' \neq u$;

$\mathscr{C}_2$ consiste delle rette $r_{uvu'v'}$, per P e per i punti $T_{v'}(P_{u'v'}) \in T_{v'}(\gamma_{v'})$, $v' \in K_0 - \{v\}$;

$\mathscr{C}_3$ è l'insieme delle rette, r_C, che congiungono P con i punti C di $\gamma_0 = T_0(\gamma_0)$.

I)$_1$ Rette di una stessa classe $\mathscr{C}_j$ sono distinte:

– $T_v(\gamma_v)$ è un q'-arco e, quindi, se $u'_1 \neq u'_2$, è anche $r_{u'_1} \neq r_{u'_2}$;

– $(u'_1, v'_1) \neq (u'_2, v'_2)$ implica $P_{uvu'_1v'_1} \neq P_{uvu'_2v'_2}$ (cfr. (10) e la Prop. 3) da cui segue $r_{uvu'_1v'_1} \neq r_{uvu'_2v'_2}$ in quanto, altrimenti, $T_v(P_{uv})$ risulterebbe allineato con i punti $P_{uvu'_1v'_1}$ e $P_{uvu'_2v'_2}$, appartenenti ad $\mathbf{A}'$ ed esterni ad r_{uv}, e ciò in contraddizione col Lemma 4.2;

– $C_1 \neq C_2$ comporta $r_{C_1} \neq r_{C_2}$ giacché, in caso contrario, $T_v(P_{uv})$ apparterrebbe a due rette distinte di $\mathbf{A}'$: la $C_1 C_2$, secante γ_0 e la r_{uv}, esterna a γ_0 (cfr. Lemma 4.2).

I)$_2$ Rette appartenenti a classi $\mathscr{C}_j$ distinte sono distinte:

– $r_{u'_1} \neq r_{uvu'_2v'}$, perché supponendo il contrario, contraddiremmo ancora il Lemma 4.2: $T_v(P_{uv})$ sarebbe infatti allineato col punto improprio $(m) \in \mathbf{P}'$ della retta $r_{u'_1}$ (cfr. Lemma 4.3) e con $P_{uvu'_2v'} \notin r_{uv}$;

– $r_{u'} \neq r_C$ in quanto, altrimenti, oltre la r_{uv} (esterna a γ_0), anche la retta congiungente $C \in \gamma_0$ col punto improprio $(m) \in \mathbf{P}'$ di $r_{u'}$ sarebbe incidente $T_v(P_{uv})$;

– con argomentazioni analoghe alle precedenti, si dimostra che $r_{uvu'v'} \neq r_C$: basta osservare che $P_{uvu'v'}$ è esterno a γ_0 (cfr. Prop. 3) e, quindi, distinto da C.

II) Le rette congiungenti P con i rimanenti punti di γ_0 sono evidentemente a due a due distinte; inoltre, in virtù del Lemma 4.2, ciascuna di esse

(3) Dal Lemma 4.3 segue $|\Gamma| = q'^2 = q$.

è distinta dalla congiungente P con un punto $T_v(P_{uv})$, $v \neq 0$ ($T_v(P_{uv})$ apparterrebbe altrimenti alla r_{uv} esterna a γ_0 e ad una secante γ_0).

Resta da provare che sono distinte le congiungenti P con due punti distinti $T_v(P_{uv})$ e $T_{v'}(P_{u'v'})$, v, $v' \in K_0$. Per questo si osservi che:

– nell'ipotesi $v = v'$ (e quindi $u \neq u'$), se le rette $PT_v(P_{uv})$ e $PT_v(P_{u'v})$ coincidessero, il punto P (esterno sia ad r_{uv} che ad $r_{u'v}$), i punti $T_v(P_{uv})$, $T_v(P_{u'v})$ ed il punto improprio $(m) \in \mathbf{P}'$ della loro congiungente sarebbero allineati;

– supponendo $v \neq v'$ e $PT_v(P_{uv})$ coincidente con $PT_{v'}(P_{u'v'})$, si perviene ancora ad una contraddizione del Lemma 4.2 in quanto, per esempio, nell'insieme delle rette incidenti $T_v(P_{uv})$ troveremmo anche la $PP_{uvu'v'}$.

PROPOSIZIONE 5. *Le tangenti a* Γ *in* $P \in T_v(\gamma_v) \subset \Gamma$, $v \in K$, *sono le congiungenti* P *con il punto improprio*, $(m(v))$, *e con il nucleo*, $(m'(v))$, *di* γ'_v (cfr. (4), (5)).

Da ogni punto improprio del subpiano $\mathbf{P}'$, *distinto da* $S = (s(s+1)^{-1})$, *escono* $q'(q'-2)/2$ *secanti e* $2q'$ *tangenti* (*le quali, complessivamente, son quindi tutte e sole le tangenti a* Γ); *dal punto* S *escono* $q'^2/2$ *secanti e nessuna tangente.*

Dimostrazione. Le rette per P secanti Γ, sono di due tipi: le congiungenti P con un altro punto $P' \in T_v(\gamma_v)$ (in numero di $q'-1$) e le rette per P e $P' \in T_{v'}(\gamma_{v'})$, $v' \neq v$ (in numero di $q'(q'-1)$); ciascuna delle prime (in quanto è parallela ad una secante γ_v per $\overline{P} = T_v^{-1}(P)$) ha il punto improprio in $\mathbf{P}'$, mentre quello delle altre ne è esterno (cfr. Lemma 4.3). Le restanti due rette per P, tangenti Γ, sono pertanto parallele alle congiungenti $\overline{P} \in \gamma_v$ con $(m(v))$ ed $(m'(v))$ rispettivamente.

Premettiamo alla dimostrazione della seconda parte dell'enunciato una osservazione sulle funzioni $m(v)$ ed $m'(v)$.

$m(v)$ ed $m'(v)$ assumono in K tutti i valori $m \in K \cup \{\infty\}$ eccettuato $m = s(s+1)^{-1}$: infatti $m(v) = m(v')$, oppure $m'(v) = m'(v')$, implica $v = v'$; inoltre le equazioni, in v, $vs(s+v(1+s))^{-1} = m$ e $s(1+v^2)(s+v^2(1+s))^{-1} = m$ sono risolubili solo se $m \neq s(s+1)^{-1}$.

Si consideri un punto $(m) \in \mathbf{P}'$, $m \neq s(s+1)^{-1}$; delle coniche γ'_v, $v \in K$, una ha in (m) il punto improprio, una seconda il nucleo, ciascuna delle rimanenti possiede esattamente $q'/2$ secanti per (m). Ognuna di queste rette è parallela ad una secante di Γ e, quindi, il numero delle secanti Γ con il punto improprio in (m) è almeno $q'(q'-2)/2$; osservando poi che il punto improprio delle secanti PP', $P \in T_v(\gamma_v)$, $P' \in T_{v'}(\gamma_{v'})$, $v \neq v'$, è esterno a $\mathbf{P}'$ (cfr. Lemma 4.3), si vede che tale numero è esattamente $q'(q'-2)/2$.

Il numero delle tangenti a Γ per un punto $(m) \in \mathbf{P}'$, $m \neq s(s+1)^{-1}$ è $2q'$ perché due sono le coniche γ'_v, $v \in K$, che hanno in (m) o il punto improprio o il nucleo.

Tutte le coniche γ'_v, $v \in K$, hanno $q'/2$ secanti che passano per S: onde $q'^2/2$ è il numero delle secanti Γ per questo punto e zero il numero delle tangenti.

PROPOSIZIONE 6. *Il q–arco* Γ *è completo.*

Dimostrazione. È sufficiente provare che le tangenti a Γ in due suoi punti distinti, P_1 e P_2, che per semplicità supporremo appartenenti a γ_0, si intersecano, fuori di P_1 e P_2, in punti, ciascuno dei quali appartiene ad almeno una secante di Γ.

Le tangenti a Γ per P_1 e P_2 sono rette del subpiano $\mathbf{P}'$ che si incidono nei punti impropri (0), (1) e in due punti, Q_1 e Q_2, appartenenti ad $\mathbf{A}'$. (0) e (1) sono incidenti qualche secante di Γ in virtù della Prop. 5; dalla Prop. 3 segue che Q_1 e Q_2 sono anch'essi incidenti qualche secante di Γ: infatti, prefissata una fibrazione $\{\sigma_{uvv'} : v' \in K\}$, ciascuno di essi o appartiene ad r_{uv}, che è una secante di Γ (cfr. Lemma 4.2), oppure coincide con un punto $P_{uvu'v'}$ appartenente alla secante $r_{uvu'v'}$ (cfr. Lemma 4.1).

La Prop. 5 si completa con la seguente

PROPOSIZIONE 7. *La traslazione* $T : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, *di equazioni*

$$x_1' = x_1 + (s+1)\,s^{-2} \quad , \quad x_2' = x_2 + s^{-1}$$

(*il cui centro è in* S) *porta* Γ *in sé.*

Dimostrazione. $T(\gamma_v) = \gamma_v$, $\forall v \in K$, in quanto, come si verifica facilmente, è $F_v(x_1, x_2) = F_v(x_1 + (s+1)\,s^{-2}, x_2 + s^{-1})$ (cfr. (3)). Dopodiché, tenuto conto della struttura di Γ e della uguaglianza $TT_v(\gamma_v) = T_v\,T(\gamma_v)$, la tesi è evidente.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BARLOTTI (1966) – *Un'osservazione intorno ad un teorema di B. Segre sui q–archi*, « Le Matematiche », *21*, 23–29.

[2] P. DEMBOWSKI (1968) – *Finite geometries*, « Ergebn. der Mathem. und ihrer Grenzg. », *Band 44*, Springer–Verlag.

[3] G. MENICHETTI (1966) – *Sopra i k–archi completi nel piano grafico di traslazione di ordine 9*, « Le Matematiche », *21*, 150–156.

[4] B. SEGRE (1955) – *Curve razionali normali e k–archi negli spazi finiti*, « Ann. Mat. pura appl. », *39* (4), 357–379.

[5] B. SEGRE (1961) – *Lectures on modern geometry*, With an appendix by L. Lombardo–Radice, Roma, Cremonese.

[6] B. SEGRE (1965) – *Istituzioni di Geometria superiore*, vol. II, Roma, Ed. Istituto Matem. « G. Castelnuovo ».

[7] G. TALLINI (1957) – *Sui q–archi di un piano lineare finito di caratteristica* $p = 2$, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », *23* (8), 242–245.