Aristide Sanini

Trasformazioni pseudoaffini di una varietà differenziabile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.4, p. 512–517.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_512_0>

Geometria. — *Trasformazioni pseudoaffini di una varietà differenziabile.* Nota di ARISTIDE SANINI, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — In the present paper the notion of affine transformation of a differentiable manifold M is extended through the introduction of transformations preserving a linear pseudoconnection of M.

INTRODUZIONE

Le trasformazioni affini di una varietà differenziabile dotata di connessione lineare sono state studiate da tempo (1).

Recentemente C. Di Comite [1] e D. Giublesi [3] hanno introdotto la nozione di *pseudoconnessione lineare*, che estende quella di connessione lineare; il primo Autore ha esaminato vari problemi relativi alle pseudoconnessioni, fra cui quello del trasporto parallelo.

Scopo della presente Nota è lo studio delle trasformazioni, anche infinitesime, che conservano una data pseudoconnessione lineare, dette per questo *trasformazioni pseudoaffini*.

Esse vengono introdotte analogamente alle trasformazioni affini, ma la loro caratterizzazione e le condizioni analitiche che le individuano sono più complesse. Ciò è dovuto al fatto che le trasformazioni pseudoaffini devono, fra l'altro, lasciare invariante un campo tensoriale σ di tipo (1,1) individuato dalla pseudoconnessione; nel caso delle connessioni lineari σ è l'identità, per cui la suddetta condizione risulta identicamente soddisfatta.

1. PSEUDOCONNESSIONI LINEARI

Siano M una varietà differenziabile C^∞ di dimensione reale n, $\mathcal{F}$ l'algebra delle funzioni differenziabili su M e $\mathcal{D}^r_s$ l'$\mathcal{F}$–modulo dei campi tensoriali (2) di tipo (r, s) su M; in particolare è $\mathcal{D}^0_0 = \mathcal{F}$, mentre indicheremo semplicemente con $\mathcal{D}^1$ l'$\mathcal{F}$–modulo $\mathcal{D}^1_0$ dei campi vettoriali su M; porremo inoltre:

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{r,s=0}^{+\infty} \mathcal{D}^r_s .$$

(*) Nella seduta del 20 aprile 1974.

(1) Cfr. ad esempio [6] per i risultati più significativi ed una notevole bibliografia.

(2) Supporremo sempre che i campi vettoriali e tensoriali introdotti siano C^∞.

Estendendo il concetto di connessione lineare, una *pseudoconnessione lineare su* M è stata definita [3] come un $\mathscr{F}$–omomorfismo D di $\mathscr{D}^1$ nell'$\mathscr{F}$–modulo delle derivazioni di $\mathscr{D}$:

$$\mathrm{D} : \mathrm{X} \in \mathscr{D}^1 \to \mathrm{D}_{\mathrm{X}}.$$

Deve pertanto essere:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{X}} f = (\sigma \mathrm{X}) f \quad , \quad \forall f \in \mathscr{F} \quad , \quad \mathrm{X} \in \mathscr{D}^1, \tag{1.1}$$

ove $\sigma \in \mathscr{D}^1_1$ è un endomorfismo di $\mathscr{D}^1$ individuato dalla pseudoconnessione D; se $\sigma =$ Identità, D è una connessione lineare su M.

Nel seguito diremo *pseudoconnessione lineare relativa all'endomorfismo* σ, o più semplicemente, *σ–connessione*, una pseudoconnessione lineare, che indicheremo con $\mathrm{D}^{(\sigma)}$, per cui valga la (1.1), ossia:

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} f = (\sigma \mathrm{X}) f. \tag{1.1'}$$

Inoltre, qualunque siano $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{Y}, \mathrm{Y}' \in \mathscr{D}^1, f \in \mathscr{F}$, si ha:

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}+\mathrm{X}'} \mathrm{Y} = \mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} + \mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}'} \mathrm{Y}, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{f\mathrm{X}} \mathrm{Y} = f \mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} (\mathrm{Y} + \mathrm{Y}') = \mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} + \mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}', \tag{1.4}$$

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} (f\mathrm{Y}) = ((\sigma \mathrm{X}) f)\, \mathrm{Y} + f \mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}. \tag{1.5}$$

Fissato un sistema di coordinate locali (x^i) in un intorno del punto $x \in \mathrm{M}$ ed indicata con $\partial_i = \partial/\partial x^i$ la base naturale di $(\mathrm{M})_x$, spazio tangente ad M in x, risulta:

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{\partial_i} x^j = \sigma^j_i, \tag{1.6}$$

ove σ^j_i sono le componenti del campo tensoriale σ; posto inoltre:

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k, \tag{1.7}$$

se $\mathrm{X} = \mathrm{X}^i(x)\, \partial_i$, $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}^i(x)\, \partial_i$, si ha:

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} = (\sigma^j_i \mathrm{X}^i \partial_j \mathrm{Y}^k + \Gamma^k_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j)\, \partial_k. \tag{1.8}$$

Le funzioni $(\sigma^j_i , \Gamma^k_{ij})$ si dicono le *componenti* della pseudoconnessione lineare $\mathrm{D}^{(\sigma)}$ nel sistema (x^i); per un cambiamento di coordinate locali $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$, esse si trasformano secondo le [4]:

$$\sigma^{j'}_{i'} = \sigma^j_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}, \tag{1.9}$$

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} - \sigma^p_i \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^p \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \tag{1.10}$$

(3) Cfr. [1], [3].
(4) Cfr. [1], n. 2.

Osservazione. Poiché $D_X^{(\sigma)}$ è una derivazione su $\mathscr{D}$, essa è individuata dalle sue restrizioni ad $\mathscr{F}$ e $\mathscr{D}^1$; pertanto $D^{(\sigma)}$ è caratterizzata dalle (1.2), $\cdots$, (1.5), in quanto la (1.5) implica [5] in particolare la (1.1′).

2. Trasformazioni pseudoaffini

Sia φ una trasformazione differenziabile di M; il suo differenziale φ_* è un isomorfismo di $(M)_x$ sopra $(M)_{\varphi(x)}$, che si estende ad un isomorfismo $\tilde{\varphi}$, che conserva il tipo e commuta con la contrazione, dell'algebra tensoriale relativa ad $(M)_x$ sull'algebra tensoriale relativa ad $(M)_{\varphi(x)}$ [6].

Per ogni campo $K \in \mathscr{D}_s^r$ resta definito un campo $\tilde{\varphi}K$ dello stesso tipo secondo la legge:

$$(\tilde{\varphi}K)_{\varphi(x)} = \tilde{\varphi}(K_x), \qquad \forall x \in M,$$

ove K_x indica il valore di K in x; ne segue che $\tilde{\varphi}$ è un automorfismo di $\mathscr{D}$.

Definizione 1. *Il campo* K *è invariante rispetto a* φ *se* $\tilde{\varphi}K = K$.

Se $K \in \mathscr{D}_1^1$, $\tilde{\varphi}K$ è individuato da [7]:

$$(\tilde{\varphi}K)(\varphi_* X) = \varphi_*(K(X)), \qquad \forall X \in \mathscr{D}^1, \tag{2.1}$$

e quindi K è invariante rispetto a φ se e solo se:

$$\varphi_* \circ K = K \circ \varphi_* . \tag{2.2}$$

È noto [8] che, se ∇ è una connessione lineare su M, l'operatore $\overline{\nabla}$ così definito:

$$\overline{\nabla}_X Y = \varphi_*^{-1} \nabla_{\varphi_* X}\, \varphi_* Y, \qquad \forall X, Y \in \mathscr{D}^1, \tag{2.3}$$

è ancora una connessione lineare su M; se $\overline{\nabla} = \nabla$, φ si dice una *trasformazione affine* di M.

Dimostriamo la seguente:

Proposizione 1. *Sia* $D^{(\sigma)}$ *una pseudoconnessione lineare su* M; *l'operatore* $\overline{D}$ *definito da*:

$$\overline{D}_X = \tilde{\varphi}^{-1} \circ D^{(\sigma)}_{\varphi_* X} \circ \tilde{\varphi}, \qquad \forall X \in \mathscr{D}^1 \tag{2.4}$$

(5) Si ha difatti, per una proprietà delle derivazioni:

$$D_X^{(\sigma)}(fY) = (D_X^{(\sigma)} f)\, Y + f D_X^{(\sigma)}\, Y.$$

(6) Cfr. [5], p. 28.

(7) Si ha $\tilde{\varphi} = \varphi_*$ sui campi vettoriali ed inoltre:

$$\varphi_*(K(X)) = \tilde{\varphi}(C(K \otimes X)) = C(\tilde{\varphi}K \otimes \tilde{\varphi}X) = (\tilde{\varphi}K)(\varphi_* X),$$

ove C indica la contrazione.

(8) Cfr. [4], p. 28.

è una pseudoconnessione lineare, trasformata di $D^{(\sigma)}$ *mediante* φ, *relativa al campo tensoriale* $\tilde{\varphi}^{-1}\sigma$; *ossia*:

$$\bar{D}_X f = \{(\tilde{\varphi}^{-1}\sigma)X\}f, \qquad \forall f \in \mathscr{F}. \tag{2.5}$$

Il fatto che $\bar{D}$ sia una pseudoconnessione lineare è conseguenza immediata delle proprietà di $\tilde{\varphi}$ e di $D^{(\sigma)}_{\varphi_* X}$. Per dimostrare la (2.5), si tenga presente che $\tilde{\varphi}f = f \circ \varphi^{-1}$ ed inoltre:

$$\begin{aligned}\bar{D}_X f &= \{\sigma(\varphi_* X)(f \circ \varphi^{-1})\} \circ \varphi = \{\varphi_*^{-1}(\sigma(\varphi_* X))\}f = \\ &= \{(\tilde{\varphi}^{-1}\sigma)X\}f,\end{aligned} \tag{2.6}$$

ove la prima uguaglianza segue dalla (2.4), la seconda dalla definizione di differenziale di un'applicazione, la terza dalla (2.1).

COROLLARIO. *La trasformata mediante* φ *di una* σ*–connessione è una* σ*–connessione se e solo se* σ *è invariante rispetto a* φ, *cioè*:

$$\varphi_* \circ \sigma = \sigma \circ \varphi_*. \tag{2.7}$$

DEFINIZIONE 2. *La trasformazione* φ *si dice una trasformazione pseudoaffine della varietà* M *dotata della* σ*–connessione* $D^{(\sigma)}$ *se lascia invariante* $D^{(\sigma)}$, *e quindi*:

$$D^{(\sigma)}_X = \tilde{\varphi}^{-1} \circ D^{(\sigma)}_{\varphi_* X} \circ \tilde{\varphi}, \qquad \forall X \in \mathscr{D}^1. \tag{2.8}$$

Si noti che la (2.8) implica l'invarianza di σ rispetto a φ; inoltre, tenuto conto dell'*Osservazione* del n. 1, la (2.8) è equivalente alla:

$$D^{(\sigma)}_X Y = \varphi_*^{-1} D^{(\sigma)}_{\varphi_* X}\varphi_* Y, \qquad \forall X, Y \in \mathscr{D}^1, \tag{2.9}$$

che individua pertanto le trasformazioni pseudoaffini della varietà M con σ–connessione $D^{(\sigma)}$.

Se $\sigma =$ Identità, $D^{(\sigma)}$ è una connessione lineare, la (2.7) è identicamente soddisfatta e la (2.9) è la definizione di trasformazione affine.

Osservazione. Una trasformazione affine di una varietà M con connessione lineare ∇ si può anche definire (9) come una trasformazione φ tale che, qualunque sia il campo $Y \in \mathscr{D}^1$ parallelo lungo una qualsiasi curva γ di M, $\varphi_* Y$ sia parallelo lungo $\varphi(\gamma)$.

Il problema del parallelismo rispetto ad una σ–connessione $D^{(\sigma)}$ è stato introdotto in [1] (10).

Ricordiamo che una curva $\gamma = \gamma(t)$ di M si dice *ammissibile* per il parallelismo (rispetto a $D^{(\sigma)}$) se esiste un campo vettoriale $X_{\gamma(t)}$ tale che $\sigma_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = \dot{\gamma}(t)$, vettore tangente a γ nel punto $\gamma(t)$; in tal caso, se

(9) Cfr. [5], pp. 225–226.
(10) Cfr. anche [2] per considerazioni più generali.

$Y \in \mathscr{D}^1$, $D_X^{(\sigma)} Y$ dipende solo dai valori che Y assume su γ. Nel sistema coordinato (x^i), tenuto conto della (1.8), si ha:

$$D_X^{(\sigma)} Y = \left(\frac{dY^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j\right) \partial_k ;$$

il campo Y si dice parallelo lungo γ se $D_X^{(\sigma)} Y = 0$.

È immediato verificare che la (2.7) implica che, se γ è ammissibile per il parallelismo e $\sigma(X) = \dot{\gamma}$, anche $\varphi(\gamma)$ è ammissibile ed inoltre $\sigma(\varphi_* X) = \varphi_* \dot{\gamma}$, vettore tangente a $\varphi(\gamma)$.

Se φ è una trasformazione pseudoaffine, cioè soddisfa alla (2.9), si ha che φ porta campi paralleli lungo una curva γ (ammissibile per il parallelismo) in campi paralleli lungo $\varphi(\gamma)$.

3. Trasformazioni pseudoaffini infinitesime

Definizione 3. *Un campo vettoriale* $X \in \mathscr{D}^1$ *è una trasformazione pseudo-affine infinitesima se il gruppo locale ad un parametro di trasformazioni locali* φ_t *da esso generato è un gruppo di trasformazioni pseudoaffini della varietà* M *con* σ*–connessione* $D^{(\sigma)}$.

Deve perciò essere, per la (2.9):

$$(3.1) \qquad (\varphi_t)_* D_Y^{(\sigma)} Z = D_{(\varphi_t)_* Y}^{(\sigma)} (\varphi_t)_* Z , \qquad \forall Y , Z \in \mathscr{D}^1$$

che implica, fra l'altro, l'invarianza di σ rispetto a φ_t, ossia, per definizione di *derivata di Lie*:

$$L_X \sigma = 0,$$

equivalente alla:

$$(3.2) \qquad [X , \sigma Y] = \sigma [X , Y] , \qquad \forall Y \in \mathscr{D}^1.$$

Le trasformazioni pseudoaffini infinitesime sono anche caratterizzate dalla seguente:

Proposizione 2. *Il campo vettoriale* X *è una trasformazione pseudoaf-fine infinitesima della varietà* M *con* σ*–connessione* $D^{(\sigma)}$ *se e solo se*:

$$(3.3) \qquad L_X D_Y^{(\sigma)} - D_Y^{(\sigma)} L_X = D_{[X,Y]}^{(\sigma)} , \qquad \forall Y \in \mathscr{D}^1.$$

Basterà verificare che, se X è una trasformazione pseudoaffine infinitesima, le derivazioni definite dai due membri di (3.3) coincidono su $\mathscr{F}$, $\mathscr{D}^1$, e viceversa.

La coincidenza su $\mathscr{F}$ equivale alla (3.2). Per quanto riguarda la coincidenza dei due membri di (3.3) su un qualsiasi campo $Z \in \mathscr{D}^1$, la dimostrazione si può condurre nello stesso modo indicato in [5], pp. 231–232, ove viene data una definizione delle trasformazioni affini infinitesime mediante la (3.3), con $\sigma =$ Identità.

Nel sistema di coordinate locali (x^i), le componenti X^i di una trasformazione pseudoaffine infinitesima X devono perciò verificare le condizioni:

$$X^r \partial_r \sigma_i^j + \sigma_r^j \partial_i X^r - \sigma_i^r \partial_r X^j = 0, \tag{3.4}$$

$$\sigma_i^r \partial_{rj}^2 X^k + X^r \partial_r \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ir}^k \partial_j X^r + \Gamma_{rj}^k \partial_i X^r - \Gamma_{ij}^r \partial_r X^k = 0, \tag{3.5}$$

che traducono la (3.3) applicata rispettivamente ad $\mathscr{F}$, $\mathscr{D}^1$.

Dalle (1.9), (1.10) si osserva che, mentre σ_i^j sono le componenti di un oggetto geometrico (campo tensoriale), non sono tali in generale le funzioni Γ_{ij}^k, mentre $(\sigma_i^j, \Gamma_{ij}^k)$ insieme costituiscono le componenti di un *oggetto lineare omogeneo*, secondo la teoria sviluppata in [6], Cap. II.

Le (3.4), (3.5) esprimono, come si verifica con qualche calcolo (11), l'annullarsi della derivata di Lie rispetto ad X dell'oggetto di componenti $(\sigma_i^j, \Gamma_{ij}^k)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. DI COMITE (1969) – *Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe* C^∞, «Ann. di Mat. Pura Appl.», *4* (83), 133–152.
[2] C. DI COMITE – *Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale* (in corso di stampa su «Ann. di Mat. Pura Appl.»).
[3] D. GIUBLESI (1969–70) – *Connessioni affini generalizzate su varietà differenziabili e loro proprietà*, «Rend. Sem. Mat. Univ. e Polit. di Torino», *29*, 297–314.
[4] S. HELGASON (1962) – *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press.
[5] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU (1963) – *Foundations of differential geometry*, *1*, Interscience Publ.
[6] K. YANO (1955) – *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland Publ.

(11) Si utilizzano le (2.8), (2.9) di [6], p. 20.