Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisabetta Strickland

Sui funtori coniugio nei gruppi PSL (2,p')

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.4, p. 464–469.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_464_0>

Algebra. — *Sui funtori coniugio nei gruppi* PSL $(2, p^f)$, Nota [(*)]
di ELISABETTA STRICKLAND, presentata [(**)] dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we study the behaviour of conjugacy functors in projective special linear groups PSL $(2, p^f)$, p a prime, f a positive integer. Precisely, we find the primes q dividing the order of the group, whose relative conjugacy functors in PSL $(2, p^f)$ control strong fusion, transfer, or weak closure of elements in the group. Such study is carried out first in the simple groups PSL $(2, p^f)$, $p \neq 2, p^f > 3$, and PSL $(2, 2^f)$, $f > 1$; finally we make a short remark on the solvable groups PSL $(2, 3)$ and PSL $(2, 2)$.

§ 1. INTRODUZIONE

Dato un gruppo finito G, è noto che si possono ottenere informazioni sulla sua struttura globale a partire dalla conoscenza di qualche sottogruppo T di un suo sottogruppo di Sylow S e del suo normalizzante $N_G(T)$ ([1], Teorema di Grün, Teorema di Alperin-Gorenstein). Ciò è consentito dalla introduzione in G dei funtori coniugio relativi ad un primo p che divida l'ordine di G e dallo studio del loro comportamento.

I funtori coniugio si ottengono nel modo seguente.

Sia G un gruppo finito ed $\mathcal{S}(G)$ l'insieme delle n-ple di elementi distinti di G.

Si indichi con $x = (x_1, \cdots, x_n)$ un elemento di $\mathcal{S}(G)$. Due elementi di $\mathcal{S}(G)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ si dicono coniugati in G, se esiste un elemento g di G tale che

$$(x_1^g, \cdots, x_n^g) = (y_1, \cdots, y_n).$$

DEFINIZIONE 1. Sia p un primo che divide l'ordine di G e $\mathcal{C}_p(G)$ l'insieme di tutti i p-sottogruppi di G.

Un *funtore coniugio* relativo al primo p in G è una rappresentazione W_p da $\mathcal{C}_p(G)$ a $\mathcal{C}_p(G)$ che soddisfa le seguenti condizioni per ogni p-sottogruppo P di $\mathcal{C}_p(G)$:

(i) $\quad W_p(P) \leq P$

(ii) $\quad W_p(P) \neq \{1\}$, se $P \neq \{1\}$

(iii) $\quad W_p(P^g) = W_p(P)^g$ per ogni g di G.

(*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca per le Strutture Algebriche e Geometriche del C.N.R.

(**) Nella seduta del 20 aprile 1974.

Per ogni funtore coniugio W_p relativo al primo p in un gruppo finito G è chiaro dalle condizioni ora poste che $W_p(P) \trianglelefteq N_G(P)$, per ogni $P \in \mathscr{C}_p(G)$.

Diremo che:

DEFINIZIONE 2. W_p controlla la fusione forte in G, se esiste un p-sottogruppo di Sylow S in G che gode della seguente proprietà: comunque si prendano due elementi di $\mathscr{S}(S)$ coniugati in G, sono coniugati in $N_G(W_p(S))$, normalizzante in G di $W_p(S)$.

DEFINIZIONE 3. W_p controlla il transfer in G, se esiste un p-sottogruppo di Sylow S in G tale che:

$$S \cap G' = S \cap N_G(W_p(S))'$$

dove G' è il sottogruppo derivato di G ed $N_G(W_p(S))'$ il sottogruppo derivato di $N_G(W_p(S))$.

DEFINIZIONE 4. W_p controlla la chiusura debole di elementi di G, se per ogni sottogruppo P appartenente a $\mathscr{C}_p(G)$ si ha

$$\text{(i)} \qquad Z(P) \leq W_p(P)$$

ed inoltre se esiste un p-sottogruppo di Sylow S di G che gode della seguente proprietà: comunque si prenda

$$\text{(ii)} \qquad x \in S \cap Z(N_G(W_p(S))),$$

per ogni elemento g di G tale che $x^g \in S$, segue che $x^g = x$.

L'elemento x si dice in tal caso «debolmente chiuso» in S rispetto a G.

Si osservi che nelle tre definizioni precedenti si richiede l'esistenza di un solo sottogruppo di Sylow verificante delle determinate ipotesi, ma è subito visto, utilizzando il teorema di Sylow, che dall'esistenza di un sottogruppo si deduce che tutti i sottogruppi di Sylow verificano la stessa condizione.

È interessante vedere come vari il comportamento dei funtori coniugio in un gruppo finito G, al variare del primo p a cui sono relativi, nell'insieme $\Pi(G)$ dei divisori primi dell'ordine del gruppo.

Lo scopo del presente lavoro è studiare questo problema nei gruppi PSL $(2, p^f)$, costituiti dalle trasformazioni lineari fatte

$$x \to \frac{ax+b}{cx+d} \qquad a, b, c, d \in GF(p^f)$$

con $ad - bc \neq 0$, tali che $ad - bc$ è un quadrato in GF (p^f).

Per comodità, useremo le seguenti abbreviazioni, per un fissato gruppo finito G:

$W_p \to$ CFF = il funtore coniugio W_p relativo al primo p controlla la fusione forte in G;

$W_p \to$ CT = il funtore coniugio W_p relativo al primo p controlla il transfer in G;

$W_p \to$ CCD = il funtore coniugio W_p relativo al primo p controlla la chiusura debole di elementi di G.

Cosicché le abbreviazioni:

$$W_p \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!| \;\; CFF \qquad W_p \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!| \;\; CT \qquad W_p \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!| \;\; CCD$$

staranno ad indicare che i precedenti controlli non vengono effettuati dal funtore coniugio W_p in G.

Tale studio verrà effettuato partendo esclusivamente dalla struttura dei gruppi considerati e dalle definizioni date dei vari tipi di controllo.

Nel § 2 studieremo il comportamento dei funtori coniugio nei gruppi PSL $(2, p^f)$, con $p \neq 2$, $p^f > 3$; nel § 3 nei gruppi PSL $(2, 2^f)$, $f > 1$; nel § 4 infine accenneremo al caso dei gruppi risolubili PSL $(2, 3)$ e PSL $(2, 2)$, esaurendo così i gruppi di questo tipo.

Useremo frequentemente i seguenti risultati:

TEOREMA 1.1 (Burnside). *Sia* S *un p–sottogruppo di Sylow di un gruppo finito* G *ed* H *e* K *due sottoinsiemi normali di* S, *tali cioè che* $H^x = H$, $K^y = K$ *per ogni scelta di* x *ed* y *in* S.

Allora, se H *e* K *sono coniugati in* G, *sono coniugati in* $N_G(S)$.

COROLLARIO 1.2. *Sia* S *un p–sottogruppo di Sylow di un gruppo finito* G, $H, K \leq Z(S)$. *Se* H *e* K *sono coniugati in* G, *allora sono coniugati in* $N_G(S)$.

$\Pi(G)$ indicherà sempre nel seguito l'insieme dei divisori primi di $|G|$.

§ 2. FUNTORI CONIUGIO IN PSL $(2, p^f)$, $p \neq 2$, $p^f > 3$.

Verrà utilizzata la seguente ([1], 1.11.1)

PROPOSIZIONE 2.1. (G. Glauberman). *Sia* G *un gruppo finito,* S *un suo p–sottogruppo di Sylow e* W_p *un funtore coniugio relativo al primo* p *in* G.

Si supponga che $|Z(S)| < |S|$, $|Z(S)| = p$, *e che* S *sia generato da alcuni coniugati di* Z (S) *in* G.

a) *Sia* $\{1\} < T \leq S$. *Allora esiste* $U \leq S$ *tale che* Z (S) *ed* U *sono coniugati in* G, *ma non in* $N_G(T)$.

b) *Nessun funtore coniugio* W_p *controlla la fusione forte in* G.

PROPOSIZIONE 2.2. *Si consideri il gruppo* $G = PSL(2, p^f)$, $p \neq 2$, $p^f > 3$ *e sia* W_2 *un funtore coniugio in* G *relativo a* 2.

Allora:

$$a)\ W_2 \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!| \;\; CFF \qquad b)\ W_2 \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!| \;\; CT \qquad c)\ W_2 \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!| \;\; CCD.$$

Dimostrazione. Sia S un 2–sottogruppo di Sylow di G. In base a quanto è dimostrato in [2], Cap. II, Teorema 8.10, si ha che:

(i) S è un gruppo diedrale di ordine uguale alla massima potenza di 2 che divide quello tra i due interi $p^f - 1$ e $p^f + 1$ che è divisibile per quattro.

(ii) $S = N_G(T)$ per ogni sottogruppo $T \neq \{1\}$, normale in S.

(iii) Comunque si prendano due involuzioni, esse sono coniugate in G.

Da quanto ora asserito, segue che:

$$S = \langle \varphi , \psi \mid \varphi^n = \psi^2 = 1; \quad \varphi^\psi = \varphi^{-1} \rangle$$

con n intero e quindi $Z(S) = \langle 1 , \varphi^{2/n} \rangle$, cioè $|Z(S)| = 2$.

S è generato da due coniugati di $\varphi^{n/2}$: basta infatti prendere ψ e $\psi\varphi$, che hanno ordine 2 e quindi sono coniugati a $\varphi^{n/2}$ per (iii), e che inoltre generano S. Per G e relativamente al primo 2, abbiamo allora che, qualunque sia il funtore W_2,

a) W_2 non controlla la fusione forte in G, come segue subito dalla Proposizione 2.1;

b) se W_2 controllasse il transfer in G, dovrebbe essere:

$$S \cap G' = S \cap N_G(W_2(S))',$$

ma poiché G è semplice ([2], Cap. II), $G' = G$.

Del resto $W_2(S)$ è normale in S, quindi $N_G(W_2(S)) = S$, per (ii).

Dovrebbe pertanto essere $S = S \cap S' = S'$, mentre in S diedrale ciò non ha luogo.

Quindi W_2 non controlla il transfer in G.

c) Si consideri ancora $\varphi^{n/2}$. Si ha che:

$$\varphi^{n/2} \in S \cap Z(S) = S \cap Z(N_G(W_2(S)).$$

Tuttavia $\varphi^{n/2}$ non è debolmente chiuso in S rispetto a G.

Siano infatti $(\varphi^{n/2})^{g_1}$ e $(\varphi^{n/2})^{g_2}$ i due coniugati di $\varphi^{n/2}$ che generano S; è allora evidente che esiste un elemento di G, e sarà ad esempio g_1, tale che:

$$(\varphi^{n/2})^{g_1} \in s \qquad \text{ma} \quad (\varphi^{n/2})^{g_1} \neq \varphi^{n/2},$$

perché $\varphi^{n/2}$ non genera S.

q.e.d.

PROPOSIZIONE 2.3. *In* $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$, $p \neq 2$, $p^f > 3$, *si consideri un funtore coniugio relativo ad un primo* $q \in \Pi(\mathrm{PSL}(2, p^f))$, $q \neq 2, p$, W_q.
Allora:

a) $W_q \to \mathrm{CFF}$ *b)* $W_q \to \mathrm{CT}$ *c)* $W_q \to \mathrm{CCD} \Longleftrightarrow W_q(T) = T$, $\forall T \in \mathscr{C}_q(G)$.

Dimostrazione. Sia W_q un funtore coniugio relativo al primo q e Q un q-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{PSL}(2, p^f)$, $p \neq 2$, $p^f > 3$, con $q \neq 2, p$.

In [2], Cap. II, Teoremi 8.3, 8.4, si trova che:

(i) Q è ciclico

(ii) Per ogni $T \leq Q$, $N_G(T)$ è un gruppo diedrale di ordine quello tra i due numeri pari $p^f - 1$ e $p^f + 1$ che non è divisibile per quattro.

Allora:

a) W_q controlla la fusione forte in G, come segue subito applicando 1.2 a $Q = Z(Q)$ e tenendo presente che Q è ciclico e che, per (ii), $N_G(W_q(Q)) = N_G(Q)$.

b) W_q controlla il transfer in G. Infatti, perché ciò abbia luogo, deve essere:

$$Q \cap G' = Q \cap N_G(W_q(Q))'.$$

Da (ii) si ottiene che il derivato di $N_G(W_q(Q))$, gruppo diedrale di ordine non divisibile per quattro, è il suo sottogruppo ciclico delle rotazioni C: poiché $Q \leq C$, $Q \cap N_G(W_q(Q))' = Q$.

Del resto G è semplice, quindi $G' = G$, da cui $Q \cap G' = Q$.

c) Perché W_q controlli la chiusura debole di elementi di G deve intanto essere $W_q(T) = T$ per ogni sottogruppo $T \in \mathscr{C}_q(G)$: solo in tal caso infatti $Z(T) \leq W_q(T)$, come si richiede nella (i) della Definizione 4, ed anzi $Z(T) = W_q(T)$. Sia allora W_q il funtore coniugio siffatto, W_q controlla in tal caso la chiusura debole di elementi di G. Infatti, essendo il centro di un gruppo diedrale di ordine non divisibile per quattro costituito dalla sola identità, si ha che:

$$Q \cap Z(N_G(W_q(Q)) = I$$

e l'identità è debolmente chiusa in Q rispetto a G.

PROPOSIZIONE 2.4. *In* $G = PSL(2, p^f)$, $p \neq 2$, $p^f > 3$, *si consideri un funtore coniugio* W_p *relativo al primo* p *ed un* p*-sottogruppo di Sylow* P *in* G. *Allora*:

$$a)\ W_p \rightarrow CFF \qquad b)\ W_p \rightarrow CT \qquad c)\ W_p \rightarrow CCD.$$

Dimostrazione. Sia W_p un funtore coniugio relativo al primo p in G e P un p-sottogruppo di Sylow di $PSL(2, p^f)$, $p \neq 2$, $p^f > 3$,

Da [2], Cap. II e da [3], § 241 si trae che:

(i) P è abeliano elementare di ordine p^f ed i $p^f - 1$ elementi di ordine p di P si separano in due classi di elementi coniugati in G.

(ii) $N_G(P) = P \tilde{\times} K$ (prodotto semidiretto), con $P \cap K = \{1\}$ e $K = \{1\}$ oppure K sottogruppo ciclico massimale in G.

Tuttavia nel caso presente non può essere $N_G(P) = P$, perché altrimenti P, essendo abeliano, sarebbe nel centro di $N_G(P)$ e allora, per un teorema di W. Burnside ([4], VII, Teorema 4.3), G non sarebbe semplice. Pertanto $N_G(P) > P$. Del resto $W_p(P) = P$, data la struttura del sottogruppo di Sylow considerato, il Teorema 1.1, e l'essere $W_p(P) \leq N_G(P)$.

Quindi $K \neq \{1\}$ e $N_G(P) = P \tilde{\times} K$, come in (ii). Allora:

a) W_p controlla la fusione forte in G, per (i), perché $N_G(W_p(P)) = N_G(P)$ e per 1.2;

b) W_p controlla il transfer, perché $P \cap G' = P$ e del resto

$$P \cap N_G(W_p(P))' = P \cap N_G(P)' = P \cap (PK)' = P,$$

essendo $(PK)' = P$, come si vede facilmente;

c) W_p controlla la chiusura debole di elementi di G; infatti

$$Z(N_G(W_p(P)) = Z(PK) = \{1\}.$$

q.e.d.

§ 3. FUNTORI CONIUGIO IN PSL $(2, 2^f)$, $f > 1$

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia* $G = PSL(2, 2^f)$, $f > 1$ *e siano* W_2 e W_q *rispettivamente un funtore coniugio in* G *relativo a* 2 *e relativo al primo* $q \in \Pi(PSL(2, 2^f))$, *con* $q \neq 2$.

Allora, con S 2-*sottogruppo di Sylow di* G *e* Q q-*sottogruppo di Sylow di* G, *si ha che*:

a) $W_2 \to CFF$ *b*) $W_2 \to CT$ *c*) $W_2 \to CCD$

a') $W_q \to CFF$ *b'*) $W_q \to CT$ *c'*) $W_q \to CCD \Longleftrightarrow W_q(T) = T, \ \forall T \in \mathscr{C}_q(G)$.

Dimostrazione. Siano W_2 un arbitrario funtore coniugio relativo a 2 ed S un 2-sottogruppo di Sylow di G.

In [2], Cap. II ed in [3], § 241 si trova che:

(i) S è abeliano elementare di ordine 2^f e le $2^f - 1$ involuzioni di S sono coniugate in G.

(ii) $N_G(S) = S \tilde{x} K$, con $S \cap K = \{1\}$ e $K = \{1\}$ oppure K ciclico massimale in G.

Si ottengono allora gli asserti relativi a W_2 ragionando come in 2.4. Sia inoltre Q un q-sottogruppo di Sylow di G.

Allora in [3], Teorema 260, p. 285 si trova che:

(i) Q è ciclico di ordine dispari;

(ii) Per ogni $T \leq Q$, $N_G(T)$ è un gruppo diedrale di ordine non divisibile per quattro.

Da cui la tesi, ragionando come in 2.3.

q.e.d.

§ 4. FUNTORI CONIUGIO IN PSL $(2, 3)$ e PSL $(2, 2)$

In [2], 11.6.14, si prova che $PSL(2, 3) \cong A_4$, gruppo alterno su quattro elementi, e $PSL(2, 2) \cong S_3$, gruppo simmetrico su tre elementi.

Si dimostra facilmente che:

PROPOSIZIONE 4.1. *Sia* W_i $(i = 2, 3)$ *un funtore coniugio relativo al primo* i *in* PSL $(2, 3)$. *Allora*:

a) $W_2 \to CFF$ *b*) $W_2 \to CT$ *c*) $W_2 \to CCD$

a') $W_3 \to CFF$ *b'*) $W_3 \to CT$ *c'*) $W_3 \to CCD$.

Altrettanto avviene in PSL $(2, 2)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. GLAUBERMAN (1971) – *Global and local properties in finite simple groups*, Powell e Higman Academic Press, London, New York.

[2] B. HUPPERT (1967) – *Endliche Gruppen*, *I*, Springer-Berlin.

[3] L. E. DICKSON (1901) – *Linear Groups*, B. G. Teubner Leipzig.

[4] D. GORENSTEIN (1968) – *Finite Groups*, Harper e Row.