Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Maroscia

Sur les anneaux de dimension zéro

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.4, p. 451–459.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_451_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Algebra. — *Sur les anneaux de dimension zéro.* Nota di PAOLO MAROSCIA (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si ottengono proprietà topologiche ed algebriche degli anelli o-dimensionali e nuove caratterizzazioni degli anelli assolutamente piatti.

L'objet de ce travail est de donner de nouvelles propriétés de nature algébrique et topologique des anneaux zéro-dimensionnels, surtout dans le cas réduit, c'est-à-dire dans le cas des anneaux absolument plats dont l'étude a été poursuivie jusqu'à présent par nombreux Auteurs (cf. par exemple [2], [7], [14], [15], [18], [19]).

Plus précisement, le paragraphe 1 contient, entre autres, un théorème de caractérisation, du point de vue topologique, des anneaux de dimension zéro, qui complète des résultats partiellement connus et qui sera très utile par la suite; on déduit aisément de ce théorème que « un anneau A a dimension zéro si, et seulement si, la topologie de Zariski et la topologie constructible coïncident sur Spec (A) ».

Dans le paragraphe suivant nous allons démontrer de nouvelles caractérisations pour les anneaux absolument plats, puis une condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit direct d'anneaux de dimension zéro le soit aussi; enfin, on prouve que « un anneau absolument plat admet seulement la graduation triviale ».

Au paragraphe 3 on démontre d'abord un théorème de structure qui s'énonce de la façon suivante: « tout anneau de dimension zéro est un produit sous-direct d'anneaux locaux de dimension zéro », ce qui révèle le rôle fondamental joué dans notre étude par ces derniers anneaux, étudiés systématiquement dans [17]; puis, en vertu de ce théorème, on donne deux autres caractérisations pour les anneaux absolument plats et enfin on classifie les anneaux dont tout idéal propre est radical, déjà étudiés dans [4] et [13].

Finalement, tous les anneaux considérés ici sont commutatifs avec élément unité et tous les homomorphismes d'anneaux conservent l'élément unité.

1. QUELQUES PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES ANNEAUX ZÉRO-DIMENSIONNELS

Récemment, M. Hochster a démontré dans [7] la Proposition suivante:

PROPOSITION 1.1. *Soit* X *un espace de Kolmogoroff quasi-compact* (1) *avec une base d'ouverts quasi-compacts stable pour l'opération d'intersection finie.*

(*) Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Université de Paris-Sud (Orsay).

(**) Nella seduta del 20 aprile 1974.

(1) Cf. [1].

Alors X *est homéomorphe à l'espace* Spec (A) (2), *muni de la topologie de Zariski* (*où* A *est un anneau*), *si, et seulement si, toute famille d'ouverts quasi-compacts d'un ensemble fermé de* X, *jouissant de la propriété d'intersection finie* (3) *a une intersection non vide.*

Grâce à ce résultat, le théorème annoncé découle du lemme suivant:

LEMME 1.2. *Soit* X *un espace topologique quasi-compact ayant les propriétés suivantes*:

i) X *admet une base d'ouverts quasi-compacts stable pour l'opération d'intersection finie*;

ii) *toute famille d'ouverts de la base jouissant de la propriété d'intersection finie a une intersection non vide.*

Alors, pour que X *soit un espace* T_2 (3) *il suffit qu'il soit un espace* T_1 (3).

Démonstration. Raisonnons par absurde; alors, quels que soient deux points distincts x et y dans X, prenons un ouvert U de la base contenant x, mais non y. Si l'on considère la famille $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ des ouverts de la base contenant y, mais non x, on obtaient encore, en vertu de i), une famille d'ouverts de la base $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, où $U_\alpha = U \cap V_\alpha$.

Or on a : $\cap\, U_\alpha = \varnothing$, car $(\cap U_\alpha) \subset (\cap V_\alpha) = \{y\}$ et $y \notin U$; donc, en vertu de ii), il existe une sous-famille finie de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha'}\}$ telle qu'on ait: $\cap\, U_{\alpha'} = \varnothing$, et alors si l'on considère l'ouvert (non vide) $V = \cap\, V_{\alpha'}$, on voit aussitôt que $x \notin V$, $y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$, ce qui contredit nos hypothèses, d'où la conclusion.

THÉORÈME 1.3. *Soit* A *un anneau et posons*: X = Spec (A). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *dim* A = 0;
2) X *est un espace* T_1;
3) X *est un espace* T_2;
4) *tout ouvert fondamental* X_f *est fermé* ($f \in A$);
5) X *est un espace régulier* (4);
6) X *est un espace* T_3 (4);
7) X *est un espace* T_4 (4);
8) X *est un espace totalement discontinu* (5);
9) X *est un espace paracompact* (4).

Démonstration. Il est immédiat que 1) $\Longleftrightarrow$ 2), 8) $\Rightarrow$ 2), 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Longleftrightarrow$ 9); en outre on a: 2) $\Longleftrightarrow$ 3), en vertu du lemme précédent. Il n'est pas difficile à voir que 6) $\Rightarrow$ 7), puisque X est quasi-compact, et que 4) $\Rightarrow$ 8); d'autre

(2) Pour la définition et les propriétés générales de Spec(A) cf. [2], Ch. II.

(3) Cf. [9].

(4) Cf. [9]; il faut signaler d'ailleurs que les définitions d'espace régulier et d'espace paracompact y données sont plus générales que celles qui se trouvent dans [1].

(5) Cf. [1].

part, on a évidemment: 7) $\Rightarrow$ 3). A ce point, pour achever la démonstration, il suffit de prouver que 5) $\Rightarrow$ 6). Supposons, par absurde, qu'il existe dans A un idéal premier $\mathfrak{p}$ contenu proprement dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$; alors, on peut trouver, en vertu de nos hypothèses, deux voisinages fondamentals disjoints X_f et X_g tels que $X_f \ni \mathfrak{p}$, $X_f \not\ni \mathfrak{m}$ et $X_g \not\ni \mathfrak{p}$, $X_g \ni \mathfrak{m}$, ce qui est manifestement absurde, d'où la conclusion.

Remarque 1. Il faut souligner que l'équivalence entre les conditions 2) et 3) du théorème précédent peut être démontrée aussi directement de la manière suivante: on suppose d'abord l'anneau A réduit (ce qui est certainement possible) et on utilise le fait que tout localisé de A par rapport à un idéal premier est un corps pour construire, à partir de deux points distincts quelconques de Spec (A), deux voisinages fondamentals satisfaisant à la propriété de Hausdorff.

Remarque 2. On voit aisément que, si A est un anneau et X = Spec (A), on a: X régulier $\Rightarrow$ X normal [(6)]; toutefois, cette relation ne s'inverse pas, en général (cf. [3]).

Le corollaire suivant résulte aussitôt du Th. 1.3:

COROLLAIRE 1.4. *Soient* A *un anneau,* $\mathcal{N}$ *son nilradical et* X = Spec (A). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*;

1) X *est un espace discret*;
2) X *est un espace* T_1 *et fini*;
3) $A/\mathcal{N}$ *est somme directe d'un nombre fini de corps.*

On sait que, si A est un anneau, on peut introduire sur X = Spec (A) une nouvelle topologie, en général plus fine que celle de Zariski, qui s'appelle la topologie constructible, définie de la façon suivante: les parties fermées sont les sous-ensembles de X de la forme f^* (Spec (B)) où f^*: Spec (B) $\to$ $\to$ Spec (A) est l'application canonique induite par un homomorphisme d'anneaux $f: A \to B$; il n'est pas difficile à voir que cette définition est équivalente à celles données par Grothendieck (cf. [6]).

On obtient alors le résultat suivant:

PROPOSITION 1.5. *Soient* A *un anneau,* X = Spec (A) *muni de la topologie de Zariski et* X′ = Spec (A) *muni de la topologie constructible.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) *dim* A = 0;
2) *l'application identique* $i: X \to X'$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). En effet, soit V un ensemble fermé quelconque de X′, donc V = f^* (Spec (B)), où $f: A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux; alors, V est aussi un ensemble fermé dans X, puisque f^* est une application

(6) Cf. [9].

continue de Spec (B) à Spec (A), munis de la topologie de Zariski, et X est un espace de Hausdorff en vertu du Th. 1.3.

2) $\Rightarrow$ 1). Raisonnons par absurde et supposons qu'il existe dans A un idéal premier $\boldsymbol{p}$, non maximal; alors, si l'on considère le morphisme canonique $f: A \rightarrow A_{\boldsymbol{p}}$, il résulte aussitôt de la condition 2) que f^* (Spec ($A_{\boldsymbol{p}}$)) est un ensemble fermé dans X, qui n'a aucun point fermé, ce qui est évidemment absurde, d'où la conclusion.

2. Quelques propriétés algébriques des anneaux zéro-dimensionnels

Donnons tout d'abord un résultat dont la démonstration est presque immédiate:

LEMME 2.1. *Soit* A *un anneau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) *dim* $A = 0$;

ii) *dim* $A/\boldsymbol{a} =$ *dim* A, *pour tout idéal* $\boldsymbol{a} \subset A$;

iii) *dim* $S^{-1} A =$ *dim* A, *pour toute partie multiplicative* S *de* A.

Nous nous proposons maintenant de démontrer un théorème de caractérisation pour les anneaux absolument plats [7] qui complète des résultats partiellement connus (cf. [2]); précisement:

THÉORÈME 2.2. *Soit* A *un anneau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) A *est réduit et dim* $A = 0$;

2) *tout idéal de* A *est radical, c'est-à-dire, il coincide avec son radical*;

3) *tout idéal principal de* A *est idempotent, ou, ce qui revient au même,* A *est un anneau régulier au sens de von Neumann* [8];

4) A *est absolument plat*;

5) *tout localisé* $A_{\boldsymbol{p}}$ *de* A *par rapport à un idéal premier* $\boldsymbol{p}$ *est un corps et coincide avec* $A/\boldsymbol{p}$;

6) *l'application* $\boldsymbol{a} \rightarrow V(\boldsymbol{a})$ *est une bijection de l'ensemble des idéaux de* A *sur l'ensemble des parties fermées de* X = Spec (A);

7) *le morphisme canonique* $\varphi: A \rightarrow \prod_i (A/\boldsymbol{m}_i)$, *où les* $\boldsymbol{m}_i$ *sont (tous) les idéaux maximaux de* A, *est fidèlement plat* [9].

Démonstration. On voit aussitôt (cf. 2.1) que 1) $\Rightarrow$ 5); en outre 5) $\Rightarrow$ 4) puisque la platitude est bien une propriété locale, et puis, (cf. [2, p. 64]), 4) $\Rightarrow$ 3). Il est clair aussi que 3) $\Rightarrow$ 2) et 2) $\Longleftrightarrow$ 6); d'autre part, on a (cf. [13]) 2) $\Rightarrow$ 1). Enfin, 4) $\Rightarrow$ 7) car l'opération d'extension par rapport au morphisme φ appliquée à un idéal maximal quelconque $\boldsymbol{m} \subset A$ donne encore, évidemment,

(7) Rappelons qu'un anneau A est dit absolument plat si tout A-module est plat.

(8) Cf. [8].

(9) Cf. [2], Ch. I.

un idéal maximal dans l'anneau $\prod_i (A/m_i)$ et $7) \Rightarrow 3)$ puisque ce dernier anneau est absolument plat, en vertu des relations qu'on vient de démontrer; donc, quel que soit un élément $x \in A$, on a: $(x^2)^e = (x)^e \cdot (x)^e = (x)^e$, (où e dénote l'opération d'extension par rapport à φ), ce qui achève la démonstration, compte tenu de nos hypothèses.

Remarque 1. Il résulte du Lemme 2.1 et du Th. 2.2 que « un anneau A a dimension zero si, et seulement si, l'anneau réduit $A/\mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ étant le nilradical de A) est absolument plat »; en outre, il faut signaler qu'une caractérisation (topologique) des anneaux dont les quotients par rapport au radical de Jacobson sont absolument plats se trouve dans [16].

Grâce au théorème précédent, nous sommes en mesure de donner une caractérisation pour les anneaux zéro-dimensionnels quelconques (10):

PROPOSITION 2.3. *Soient* A *un anneau et* $\mathcal{N}$ *son nilradical. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *dim* $A = 0$;

2) $\forall x \in A$, *il existe un entier* $n > 0$ (11) *tel que* $(x^n) = (x^{n+1})$;

3) $\forall x \in A$, *il existe deux entiers* $n, k > 0$ (11) *tels que* $(x^n) = (x^{n+k})$;

4) $\forall x \in A$, *il existe un entier* $n > 0$ (11) *tel que* $(x^n) = (x^{n+h})$, *pour tout entier* $h > 0$.

Démonstration. $1) \Rightarrow 3)$. En effet, soit x un élément quelconque de A, alors, en vertu du Th. 2.2, il existe un élément $a \in A$ tel que $x - ax^2 = t \in \mathcal{N}$; or, si m est le plus petit entier tel que $t^m = 0$, on voit aussitôt que $x^{2m} \in (x^{2m+2})$, d'où la conclusion.

Il est clair en outre que $3) \Rightarrow 2)$ et $2) \Longleftrightarrow 4)$, de sorte que, pour achever la démonstration, il nous reste à prouver que $2) \Rightarrow 1)$: pour cela, il suffit d'observer (cf. 2.2) que, dans nos hypothèses, l'anneau $A/\mathcal{N}$ satisfait bien à la condition 2) et de vérifier directement que tout localisé de $A/\mathcal{N}$ par rapport à un idéal premier est un corps.

Le résultat suivant découle aussitôt de la proposition précédente:

COROLLAIRE 2.4. *Soit* A *un anneau zéro-dimensionnel. Alors tout élément régulier, autrement dit, qui n'est pas diviseur de zéro, est inversible.*

Remarque 2. Ce dernier résultat, démontré aussi, d'une autre façon, dans [8], né s'inverse pas, en général, car, par exemple, si B est un anneau local quelconque de dimension > 0 et k est son corps résiduel, on voit aussitôt que l'anneau $A = B \oplus k$, où la multiplication est définie de la manière suivante: pour tout couple d'éléments $((b_1, k_1), (b_2, k_2))$ dans A, $(b_1, k_1) \cdot (b_2, k_2) = (b_1 b_2, b_1 k_2 + b_2 k_1)$, est un anneau (local) de dimension > 0 dans lequel tout élément régulier est inversible. Pourtant, le Corollaire s'inverse si l'on suppose l'anneau réduit (cf. [8, p. 63]).

(10) Cf. aussi [19].
(11) Dépendant de x.

Ensuite, il faut souligner qu'un produit direct d'anneaux zéro-dimensionnels peut bien avoir une dimension plus grande que zéro, comme l'exemple suivant montre:

Soit $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, où $A_i = k[X]/(X^{i+1})$, (k est un corps quelconque et X est une indéterminée sur k); alors, on voit aussitôt que le radical de Jacobson, J, de A est égal au produit direct des idéaux maximaux des anneaux A_i, puisque A est un produit direct d'anneaux locaux, donc l'élément $x = (\bar{X}, \bar{X}, \ldots, \bar{X}, \ldots)$ dans A appartient à J, mais évidemment, x n'est pas nilpotent, ce qui prouve que dim $A > 0$.

Toutefois, on obtient les propositions suivantes dont la première résulte immédiatement du Th. 2.2;

PROPOSITION 2.5. *Soit* $R = \prod_{i \in I} R_i$ *un produit direct d'anneaux. Alors* R *est absolument plat si, et seulement si, chaque* R_i *l'est aussi.*

En outre, tout ultraproduit (12) *d'anneaux absolument plats est encore un anneau absolument plat* (13).

PROPOSITION 2.6. *Soit* $R = \prod_{i \in I} R_i$ *un produit direct d'anneaux zéro-dimensionnels et soient* $\mathcal{N}$ *son nilradical et* $\mathcal{N}_i$ *le nilradical de l'anneau* R_i *pour chaque indice* $i \in I$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *dim* $R = 0$;

2) $\mathcal{N} \supset \prod_{i \in I} \mathcal{N}_i$, *autrement dit* (14) $\mathcal{N} = \prod_{i \in I} \mathcal{N}_i$.

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). En effet, si, par absurde, il existe un élément $x \in \prod_{i \in I} \mathcal{N}_i$ qui n'est pas nilpotent dans R, un tel élément ne peut pas satisfaire, évidemment, aux conditions équivalentes de la Prop. 2.3, d'où notre assertion.

2) $\Rightarrow$ 1). Soit x un élément quelconque de R; alors, en vertu de la Prop. 2.3 appliquée aux anneaux R_i, il existe un élément $a \in R$ tel que $x = ax^2 + z$, où $z \in \mathcal{N}$; donc, si n est le plus petit entier tel que $z^n = 0$, on a: $(x^n) = (x^{2n+2})$, ce qui achève la démonstration, compte tenu encore de la Prop. 2.3.

Enfin, on va montrer qu'un anneau absolument plat admet seulement la graduation triviale; donnons d'abord le résultat suivant:

LEMME 2.7. *Soit* $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ *un anneau gradué en degrés positifs. Alors tout élément idempotent de* S *appartient à* S_0; *donc,* Spec (S) *est connexe si, (et seulement si),* Spec (S_0) *l'est aussi.*

(12) Pour la définition d'un ultraproduit cf. [10].

(13) On en déduit aisément qu'un ultraproduit de corps est aussi un corps.

(14) Il est clair que le nilradical d'un produit direct d'anneaux quelconques est bien contenu dans le produit direct des nilradicaux des facteurs.

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer la première assertion. Or, si e est un élément idempotent quelconque de S, disons $e = e_{i_1} + \cdots + e_{i_k}$, où $0 \leq i_1 < \cdots < i_k$, les relations: $e = e^2 = e^3$ entraînent $e_{i_1}^2 = e_{i_1}$ et $e_{i_2} = 2 e_{i_1} e_{i_2} = 3 e_{i_1} e_{i_2}$, donc $e_{i_2} = 0$, d'où la conclusion.

La proposition suivante découle aussitôt du lemme précédent et du Th. 2.2:

PROPOSITION 2.8. *Soit* S *un anneau réduit admettant une graduation non triviale* (*en degrés positifs*). *Alors on a*: *dim* $S > 0$.

Cependant, il faut remarquer qu'il existe bien des anneaux zéro-dimensionnels (non réduits) admettant une graduation non triviale: il suffit de prendre, par exemple, l'anneau $A = k[X]/(X^n)$, où k est un corps quelconque, X est une indéterminée sur k et n un entier ≥ 2.

3. UN THÉORÈME DE STRUCTURE

On sait que, en vertu d'un théorème bien connu de Birkhoff (cf. [12]), « tout anneau est un produit sous-direct d'anneaux subdirectement irréductibles »; on en déduit le théorème annoncé, en appliquant aussi le Th. 1.3 et le résultat suivant:

LEMME 3.1. *Soit* A *un anneau et* $c(A)$ *son coeur* (15). *Alors, si* $c(A) \neq (0)$, Spec (A) *est connexe et* $c(A)$ *est un idéal principal ayant carré nul.*

Démonstration. Il est clair que A ne contient aucun élément idempotent $e \neq 0, 1$, autrement on aurait: $(e) \cap (1 - e) = (0)$, ce qui contredit nos hypothèses; les autres assertions sont immédiates.

THÉORÈME 3.2. *Tout anneau de dimension zéro est un produit sous-direct d'anneaux locaux de dimension zéro.*

Nous nous proposons maintenant d'établir, en utilisant le théorème précédent, deux autres caractérisations pour les anneaux absolument plats (cf. Th. 2.2):

PROPOSITION 3.3. *Soit* A *un anneau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) A *est réduit et dim* $A = 0$;
2) *tout idéal primaire est maximal* (16).

Démonstration. Il est immédiat (cf. 2.2) que 1) $\Rightarrow$ 2); réciproquement, il suffit d'observer qu'on a d'abord: dim $A = 0$ et puis que un anneau local ayant la propriété 2) est bien un corps, d'où la conclusion, en vertu du Th. 3.2.

(15) Rappelons qu'on définit coeur d'un anneau l'intersection de tous ses idéaux $\neq (0)$.
(16) Cette proposition est aussi démontrée, d'une autre façon, dans [11].

PROPOSITION 3.4. *Soit* A *un anneau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) A *est réduit et dim* A = 0;

2) *tout idéal ayant un radical premier est premier.*

Démonstration. On voit aussitôt (cf. 2.2) que 1) ⇒ 2). Il est clair que la propriété 2) est stable par passage aux quotients, donc, en vertu du Th. 3.2, pour montrer que 2) ⇒ 1) il suffit de faire voir que dim A = 0.

En effet, puisque dans nos hypothèses on a (cf. [5]): dim A $\leq$ 1, supposons par absurde que dim A = 1. Alors, quel que soit un idéal premier minimal $\mathfrak{p} \subset$ A, en vertu des considérations ci-dessus, l'anneau A′ = A/$\mathfrak{p}$ est un anneau intègre dont tout anneau quotient est réduit, ou, ce qui revient au même, tout idéal de A′ est radical, donc A′ est un corps (cf. 2.2), ce qui achève la démonstration.

Enfin, on va étudier les anneaux dont tout idéal propre (17) est radical. On a d'abord le résultat suivant (cf. [13] et 3.1):

LEMME 3.5. *Soit* A *un anneau dont tout idéal propre est radical et soit* $\mathcal{N}$ *son nilradical. Alors* A *est un anneau zéro-dimensionnel dont tout idéal propre contient* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{N}$ *est un idéal principal ayant carré nul.*

Nous sommes finalement en mesure de donner une classification des anneaux en question (cf. 1.3, 3.1 et 3.5):

PROPOSITION 3.6. *Soit* A *un anneau dont tout idéal propre est radical et soit* $\mathcal{N}$ *son nilradical. Alors il peut se présenter seulement les deux cas suivants*:

1) $\mathcal{N} = (0)$ *auquel cas* A *est absolument plat*;

2) $\mathcal{N} \neq (0)$ *auquel cas* A *est un anneau local ayant un seul idéal propre* (18)

Il faut remarquer que la proposition précédente, dans le cas non réduit, est aussi conséquence du Th. 3.2: en effet, il suffit pour cela de vérifier directement que un anneau local dont tout idéal propre est radical possède au plus un seul idéal propre.

Ajouté sur épreuves. – Dans un travail ultérieur nous démontrerons, entre autres, quelques extensions des résultats donnés dans le paragraphe 1, pour des schémas quelconques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI (1965) – *Topologie générale*, Ch. I, Hermann, Paris.

[2] N. BOURBAKI (1961) – *Algèbre Commutative*, Ch. I, II; Hermann Paris.

[3] G. DE MARCO et A. ORSATTI (1971) – *Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *30*, 459–466.

[4] M. FONTANA et G. MAZZOLA, *Sur les anneaux et schémas co-discrets* (à paraître dans « Rend. Acc. Naz. Lincei »).

(17) Autrement dit, différent de l'idéal (0) et de l'anneau tout entier.

(18) On signale que ces anneaux ont été déjà caractérisés, d'une autre façon, dans [13].

[5] R. W. GILMER (1962) – *Rings in which semi-primary ideals are primary*, « Pacif. J. Math. », *12*, 1273–1276.
[6] A. GROTHENDIECK et J. A. DIEUDONNE (1971) – *Eléments de Géométrie Algébrique*, I, Springer, Berlin.
[7] M. HOCHSTER (1969) – *Prime ideal structure in commutative rings*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *142*, 43–60.
[8] I. KAPLANSKI (1970) – *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, Boston.
[9] J. L. KELLEY (1955) – *General topology*, Van Nostrand, Princeton.
[10] S. KOCHEN (1961) – *Ultraproducts in the theory of models*, « Ann. Math. » (2), *74*, 221–261.
[11] H. LAL (1971) – *A remark on rings with primary ideals as maximal ideals*, « Math. Scand. », *29*, 72.
[12] J. LAMBEK (1966) – *Lectures on rings and modules*, Blaisdell, London.
[13] P. MAROSCIA – *Sugli anelli commutativi unitari in cui ogni ideale proprio è primo* (à paraître dans « Rend. Acc. Naz. Lincei »).
[14] J. P. OLIVIER (1968) – *Anneaux absolument plats universels et épimorphismes d'anneaux*, « C. R. Acad. Sci. Paris », sér. A–B, *266*, A317–A318.
[15] R. S. PIERCE (1967) – *Modules over commutative regular rings*, « Mem. Amer. Math. Soc. », *70*.
[16] P. SAMUEL (1948) – *Ultrafilters and compactification of uniform spaces*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *64*, 100–132.
[17] E. SNAPPER (1950) – *Completely primary rings*, I, « Ann. Math. », *52*, 666–693.
[18] R. WIEGAND (1971) – *Modules over universal regular rings*, « Pacif. J. Math. », *39*, 807–819.
[19] R. WIEGAND (1973) – *Descent of projectivity for locally free modules*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *41*, 342–348.