Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Ermanno Lanconelli

## Sul problema di Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine a coefficienti discontinui

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **56** (1974), n.4, p. 441–445.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_441_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

**Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali**

*Seduta del 20 aprile 1974*

*Presiede il Presidente della Classe* BENIAMINO SEGRE


## SEZIONE I

**(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)**

**Matematica.** — *Sul problema di Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine a coefficienti discontinui* (*). Nota di ERMANNO LANCONELLI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.


SUMMARY. — We consider the Dirichlet problem for a class of second order linear parabolic operators with discontinuous coefficients in divergence form; some theorems on regularity of boundary points are given.


1. In questa Nota enunciamo alcuni Teoremi sulla regolarità dei punti di frontiera per il problema di Dirichlet relativo agli operatori parabolici del secondo ordine

$$
(1) \qquad \mathrm{L}u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(z)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(z)\right] + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(z)\,u - \frac{\partial u}{\partial y}
$$

$$
(z = (x\,,y) = (x_1\,,\cdots,x_u\,,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})\,,
$$

per cui:

$$
(\mathrm{I}) \qquad a_{i,j} = a_{j,i} \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}), \quad i\,,j = 1\,,\cdots,n,
$$

ed esiste $r > 0$ tale che

$$
r^{-1}\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(z)\,\xi_i\,\xi_j \quad , \quad \forall z \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}\,,
$$

$$
\forall \xi = (\xi_1\,,\cdots,\xi_u) \quad , \quad \|\xi\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right)^{1/2};
$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA del C.N.R.
(**) Nella seduta del 20 aprile 1974.

(II) $a_i, b_i \in \mathbf{L}_{p,q}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}), \quad i = 1, \cdots, n,$

con $\quad 2 < p, q \leq \infty, \quad n/2p + 1/q \leq 1/2;$

$c \in \mathbf{L}_{p_1,q_1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$

con $\quad 1 < p_1, q_1 \leq \infty, \quad n/2p_1 + 1/q_1 < 1$ (1);

(III) in un intorno dell'infinito $\mathrm{L} \equiv \Delta - \partial/\partial y$, essendo $\Delta$ l'operatore di Laplace in $\mathbf{R}^n$.

Indichiamo con $\Omega$ un aperto limitato e non vuoto di $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$.

È noto (cfr. ad esempio [2]) che le soluzioni deboli di $\mathrm{L}u = 0$ in $\Omega$ sono localmente hölderiane e soddisfano un principio di massimo ed una disuguaglianza di tipo Harnack.

È allora possibile, mediante il metodo delle soprasoluzioni e delle sottosoluzioni di Perron–Wiener, costruire una «soluzione generalizzata», $\mathrm{H}_\varphi^\Omega$, del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \mathrm{L}u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u/\partial\Omega = \varphi \quad , & \varphi \in \mathrm{C}(\partial\Omega). \end{cases}$$

$\mathrm{H}_\varphi^\Omega$ è soluzione debole di $\mathrm{L}u = 0$ in $\Omega$ e quindi, in particolare, è ivi continua.

Un punto $z_0 \in \partial\Omega$ si dice *L–regolare per* $\Omega$, se riesce

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{H}_\varphi^\Omega(z) = \varphi(z_0) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}(\partial\Omega).$$

A differenza di quanto accade nel caso ellittico (si veda [11]), in quello parabolico la regolarità di $z_0$ varia, in generale, con l'operatore L. Ad esempio gli operatori

$$\frac{1}{a}\Delta - \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{1}{b}\Delta - \frac{\partial}{\partial y}, \quad a, b > 0 \quad , \quad a \neq b,$$

non hanno gli stessi punti regolari (cfr. [4], Teorema 8.1]

Non si può quindi sperare di trovare *un* operatore «campione» per lo studio della regolarità nel caso parabolico; tale ruolo può essere svolto dalla classe

$$\mathscr{L}_0 = \left\{ \frac{1}{a}\Delta - \frac{\partial}{\partial y} \quad ; \quad a > 0 \right\}.$$

(1) $\mathbf{L}_{p,q}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ è lo spazio delle (classi di) funzioni misurabili su $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ e tali che

$$+\infty > \| u ; \mathbf{L}_{p,q}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \| = \begin{cases} \left( \int_{\mathbf{R}} \| u(\cdot, y) ; \mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n) \|^q \, \mathrm{d}y \right)^{1/q}, & \text{se } q < \infty, \\ \sup\limits_{y \in \mathbf{R}} \operatorname{ess} \| u(\cdot, y) ; \mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n) \| & \text{se } q = \infty; \end{cases}$$

$\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$ è lo spazio di Lebesgue delle (classi di) funzioni di $p$–esima potenza sommabile su $\mathbf{R}^n$, con la consueta norma.

Infatti, abbiamo provato il seguente

TEOREMA A. $z_0 \in \partial\Omega$ *è regolare rispetto ad ogni operatore del tipo* (1) *se e solo se esso è regolare rispetto ad ogni operatore della classe* $\mathscr{L}_0$ .

Il successivo teorema assegna una caratterizzazione della regolarità rispetto alla classe $\mathscr{L}_0$.

Indichiamo con K la soluzione fondamentale dell'equazione del calore; per ogni sottoinsieme compatto F di $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ indichiamo con $\mathscr{M}^+(\mathrm{F})$ l'insieme delle misure di Radon non negative col supporto contenuto in F e chiamiamo capacità di F la

$$
(2) \qquad \mathscr{C}(\mathrm{F}) = \sup \left\{ \mu(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \; ; \; \mu \in \mathscr{M}^+(\mathrm{F}) \; , \; \int\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}} \mathrm{K}(z - \zeta) \, d\mu(\zeta) \leq 1 \; , \; \forall z \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \right\} .
$$

Per ogni $\lambda \in ]0, 1[$ e per ogni $h, k \in \mathrm{N}$ indichiamo con $\Omega'_{h,k}(z_0; \lambda)$ l'insieme

$$
\Omega'_{h,k}(z_0;\lambda) = \left\{ z = (x, y) \in \Omega' \; ; \; \lambda^{k+1} \leq y_0 - y \leq \lambda^k \, , \, \lambda^h \leq \exp - \frac{\|x - x_0\|^2}{4(y_0 - y)} \leq \lambda^{h-1} \right\} .
$$

Ebbene

TEOREMA B. $z_0 \in \partial\Omega$ *è regolare rispetto ad ogni operatore della classe* $\mathscr{L}_0$ *se e solo se, per un* (*e quindi per ogni*) $\lambda \in ]0, 1[$, *risulta*

$$
(3) \qquad \sum_{h,k=1}^{\infty} \frac{\mathscr{C}(\Omega'_{h,k}(z_0;\lambda))}{\lambda^{k\frac{n}{2} - ha}} = +\infty \quad , \quad \forall a > 0 .
$$

Se $\Omega = \mathscr{O} \times \mathrm{I}$ è un aperto cilindrico ($\mathscr{O}$ aperto di $\mathbf{R}^n$, I intervallo di $\mathbf{R}$) e $z_0 = (x_0, y_0) \in (\partial\mathscr{O}) \times \mathrm{I}$, si può provare che la (3) è equivalente alla condizione di Wiener per l'operatore di Laplace relativamente al punto $x_0 \in \partial\mathscr{O}$. Allora:

$z_0$ *è* L*–regolare per ogni operatore del tipo* (1) *se e solo se* $x_0$ *è regolare* (*relativamente ad* $\mathscr{O}$) *per l'operatore di Laplace.*

Di qui, per un risultato di Miller ([7]), segue che la condizione (3) non assicura la regolarità di $z_0$ relativamente alla classe degli operatori parabolici in forma non divergenza. Condizioni di regolarità per operatori di questo tipo, i coefficienti dei quali verificano una condizione di tipo Hölder, sono state annunciate recentemente da Novrusov ([9]; cfr. anche Pini [10], Landis [6]. Murakami [8]).

2. Le dimostrazioni dei Teoremi A e B compariranno in una Nota di prossima pubblicazione.

Qui illustriamo brevemente il procedimento seguito per provare i Teoremi suddetti, nel caso particolare in cui i coefficienti $a_i$ e $c$ dell'operatore L sono identicamente nulli.

Sia $\mathrm{X} = \mathbf{R}^n \times ]\alpha, \beta[$ una striscia contenente $\overline{\Omega}$ e sia $g$ la soluzione fondamentale di $\mathrm{L}u = 0$ in X. Per quanto provato in [1] esistono delle costanti positive $\gamma_i$ ed $a_i$, $i = 1, 2$, tali che

$$\gamma_1 K^{(a_1)}(z - \zeta) \leq \bar{g}(z;\zeta) \leq \gamma_2 K^{(a_2)}(z - \zeta) \tag{4}$$

dove $K^{(a_i)}$ denota la soluzione fondamentale dell'equazione $\left(\Delta/a_i - \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0$.

Ora, se indichiamo con $\mathscr{C}_a$ la capacità definita analogamente alla $\mathscr{C}$, sostituendo nella (2) K con $K^{(a)}$ $\left(\text{soluzione fondamentale di } \Delta/a - \frac{\partial}{\partial y}, \ a > 0\right)$ si ha

PROPOSIZIONE 1. *Per ogni compatto* $F \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ *esiste una costante positiva* $\sigma$ *dipendente solo da a, tale che*

$$\sigma^{-1} \mathscr{C}(F) \leq \mathscr{C}_a(F) \leq \sigma \mathscr{C}(F).$$

Di qui, utilizzando il Teorema 1.2 di [5], si deduce immediatamente la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Condizione necessaria affinché* $z_0 \in \partial\Omega$ *sia regolare rispetto ad ogni operatore della classe* $\mathscr{L}_0$ *è che valga la* (3).

Sia ora $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ed indichiamo con $F_\lambda$, $\lambda \in ]0, 1[$, l'insieme

$$F_\lambda = \{z = (x, y) \in \Omega' ; |x - x_0|^2 \leq \lambda, 0 \leq y_0 - y \leq \lambda\}$$

e con $V_\lambda$ la «soluzione generalizzata del problema di Dirichlet esterno»

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } F'_\lambda \cap X \\ u/\partial F_\lambda = 1, & u(x, \alpha) = u/\infty = 0. \end{cases}$$

È noto (cfr. [3]) che $z_0$ è L–regolare se e solo se $V_\lambda(z_0) = 1$ per ogni $\lambda \in ]0, 1[$. D'altra parte, utilizzando la (4) e la Proposizione 1, con procedimenti analoghi a quelli seguiti in [5] (cfr. la dimostrazione del Teorema 2.2) si prova il seguente

LEMMA. *Per ogni operatore* L *del tipo* (1) *esistono* $a, c > 0$ *tali che,*

$$V_\lambda(z_0) \geq \frac{\Sigma_\lambda}{c + \Sigma_\lambda}, \quad \forall \lambda \in ]0, 1[ \text{ (2)},$$

*dove* $\Sigma_\lambda$ *è la serie che figura nella* (3).

*Dimostrazione del Teorema A.* La necessità è banale.

Proviamo la sufficienza. Se $z_0$ è regolare rispetto ad ogni operatore della classe $\mathscr{L}_0$, in forza della Proposizione 2 vale la (3); allora, per il Lemma, $V_\lambda(z_0) = 1$ per ogni $\lambda \in ]0, 1[$ ed il punto $z_0$ è L–regolare.

*Dimostrazione del Teorema B.* La necessità è affermata dalla Proposizione 2. La sufficienza è conseguenza del fatto che, se vale la (3), il punto $z_0$ è L–regolare rispetto ad ogni operatore del tipo (1) (cfr. la dimostrazione precedente) e quindi, in particolare, rispetto ad ogni operatore della classe $\mathscr{L}_0$.

(2) Conveniamo di porre $\dfrac{+\infty}{c + (+\infty)} = 1$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] D. G. ARONSON (1969) – «Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa», *22*.
[2] D. G. ARONSON e J. SERRIN (1967) – «Archive for Rat. Mech. and An.», *25*.
[3] H. BAUER (1966) – «Lecture Notes in Math.», *22*, Springer–Verlag.
[4] E. EFFROS e J. KAZDAN (1970) – «J. of Diff. Eq.», *8*.
[5] E. LANCONELLI (1973) – «Ann. di Mat. pura ed applicata», *97*.
[6] E.M. LANDIS (1969) – «D.A.N., S.S.S.R.», *185*.
[7] K. MILLER (1970) – «Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa», *24*.
[8] H. MURAKAMI (1972) – «Proc. Japan Acad.», *48*.
[9] A. A. NOVRUSOV (1973) – «D.A.N., S.S.S.R.», *209*.
[10] B. PINI (1955) – «Rivista Mat. Univ. Parma», *6*.
[11] G. STAMPACCHIA (1965) – «Ann. Ist. Fourier, Grenoble», *15*.