Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Patrizia Fiorino, Francesco Guaraldo

Completamento di una categoria relativa

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.3, p. 343–346.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_3_343_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Categorie. — *Completamento di una categoria relativa* [*]. Nota di PATRIZIA FIORINO MACRÌ e FRANCESCO GUARALDO, presentata [**] dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Let $\mathcal{C}$ be a relative faithful category on a category $\mathcal{E}$ with inductive limits. The aim of the present paper is to construct a relative faithful category $\mathcal{C}'$ on $\mathcal{E}$ containing $\mathcal{C}$ such that $\mathcal{C}'$ possesses the inductive limits, these limits being preserved by the structural functor $\mathcal{F}' : \mathcal{C}' \to \mathcal{E}$.

INTRODUZIONE

In un lavoro in corso di pubblicazione [2] [1], M. Jurchescu considera la categoria F degli spazi di Fréchet e la immerge nella categoria LF di opportuni indoggetti (cioè limiti induttivi di spazi di Fréchet); immerge quindi la LF in una conveniente categoria QLF di quozienti di oggetti di LF in guisa che QLF possieda i limiti induttivi numerabili. Un oggetto di QLF ha un « soggiacente » spazio vettoriale che è limite induttivo degli spazi vettoriali soggiacenti a spazi di Fréchet dei quali il considerato oggetto sia limite.

Da questo punto di vista, la costruzione della QLF è, nella sua essenza, un caso particolare del seguente problema di completamento. Sia data una categoria relativa fedele $\mathcal{C}$ su $\mathcal{E}$ [2], dove $\mathcal{E}$ ammetta i limiti induttivi ($\mathcal{C}$ sta qui in luogo della categoria degli spazi di Fréchet ed $\mathcal{E}$ in luogo della categoria degli spazi vettoriali « soggiacenti »). Si tratta di costruire una categoria relativa fedele $\mathcal{C}'$ su $\mathcal{E}$, di cui $\mathcal{C}$ sia sottocategoria [3], tale che in $\mathcal{C}'$ esistano i limiti induttivi dei funtori da una arbitraria categoria piccola, ed inoltre il funtore strutturale $\mathcal{F}'$ di $\mathcal{C}'$ commuti con essi.

Oggetto della presente Nota è la costruzione di una tale categoria. Per fare ciò introduciamo dapprima la categoria $L\mathcal{C}$: essa è definita tramite $\mathcal{C}$–filtrazioni di oggetti di $\mathcal{E}$ e gode della proprietà di possedere le somme. La categoria desiderata, che indicheremo con $QL\mathcal{C}$, è allora quella dei quozienti di oggetti di $L\mathcal{C}$ ottenuti con epimorfismi stretti [4].

In questa Nota, dopo aver definito la $L\mathcal{C}$ e la $QL\mathcal{C}$, ci limitiamo ad enunciare i teoremi fondamentali. Le relative dimostrazioni, altri risultati ed esempi (spazi bornologici, spazi compattologici, ecc.) saranno trattati in un successivo lavoro.

(*) Lavoro eseguito con contributo del CNR nell'ambito del G.N.S.A.G.A.
(**) Nella seduta del 9 marzo 1974.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia data alla fine del lavoro.

(2) Una categoria relativa fedele $\mathcal{C}$ su $\mathcal{E}$ è una categoria $\mathcal{C}$ munita di un funtore fedele $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, che diremo funtore strutturale di $\mathcal{C}$, essendo $\mathcal{E}$ una categoria fissata.

(3) Una sottocategoria di una categoria relativa $\mathcal{C}'$ su $\mathcal{E}$ è una categoria relativa $\mathcal{C}$ su $\mathcal{E}$ con la proprietà che esista un funtore di immersione $\mathcal{I} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tale che $\mathcal{F}'\mathcal{I} = \mathcal{F}$, dove $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ sono i funtori strutturali rispettivamente di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.

(4) Per la nozione di morfismo stretto si veda [1], pp. 87–91.

Esprimiamo i nostri più vivi ringraziamenti ai proff. M. Jurchescu e P. Flondor per i consigli che ci hanno dato durante la stesura di questa Nota.

0. Ipotesi

Sia $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ un funtore fedele tra due categorie $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{E}$.

Supponiamo che:

a) in $\mathcal{C}$ esistano le somme finite;

b) $\mathcal{E}$ sia tale che:

b_1) esistano le somme;

b_2) per ogni famiglia di monomorfismi $\{v_i : A_i \to B_i\}_{i \in I}$ il morfismo $\coprod_{i \in I} v_i : \coprod_{i \in I} A_i \to \coprod_{i \in I} B_i$ sia un monomorfismo (5);

b_3) le iniezioni canoniche di somma siano monomorfismi;

b_4) esistano i conuclei;

c) il funtore $\mathcal{F}$ commuti con le somme.

Le condizioni b_1) e b_4) equivalgono (come è ben noto) alla ipotesi, già esplicitamente indicata nell'Introduzione, che in $\mathcal{E}$ esistano i limiti induttivi (di funtori da una categoria piccola).

1. La categoria L$\mathcal{C}$

Sia E un oggetto di $\mathcal{E}$. Diremo $\mathcal{C}$–filtrazione di E una famiglia $(E_i)_{i \in I}$ di oggetti di $\mathcal{C}$ tale che:

I) $I(\leq)$ sia un insieme preordinato filtrante crescente;

II) la famiglia $(\mathcal{F}(E_i))_{i \in I}$ sia un sistema induttivo filtrante di sottoggetti di E;

III) $\forall i, i' \in I$, con $i \leq i'$, il morfismo canonico $u_{ii'} : \mathcal{F}(E_i) \to \mathcal{F}(E_{i'})$ sia del tipo $\mathcal{F}(v_{ii'})$ dove $v_{ii'} : E_i \to E_{i'}$;

IV) $E = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}(E_i)$.

Due $\mathcal{C}$–filtrazioni $(E_i)_{i \in I}$, $(E'_j)_{j \in J}$ di E si diranno equivalenti se esistono due applicazioni $\varphi : I \to J$, $\psi : J \to I$ tali che per ogni $i \in I$, $j \in J$ $\mathcal{F}(E_i)$ sia sottoggetto di $\mathcal{F}(E'_{\varphi(i)})$ e $\mathcal{F}(E'_j)$ sia sottoggetto di $\mathcal{F}(E_{\psi(j)})$ ed inoltre i morfismi canonici $a_i : \mathcal{F}(E_i) \to \mathcal{F}(E'_{\varphi(i)})$ e $b_j : \mathcal{F}(E'_j) \to \mathcal{F}(E_{\psi(j)})$ siano tali che $a_i = \mathcal{F}(\bar{a}_i)$, $b_j = \mathcal{F}(\bar{b}_j)$, con $\bar{a}_i : E_i \to E'_{\varphi(i)}$, $\bar{b}_j : E'_j \to E_{\psi(j)}$.

Si dimostra che questa è una relazione di equivalenza.

Definiamo la categoria L$\mathcal{C}$ come segue: un oggetto di L$\mathcal{C}$ è un oggetto $E \in Ob\mathcal{E}$ munito di una classe di equivalenza di $\mathcal{C}$–filtrazioni di E. Un elemento qualunque di questa classe si dirà *$\mathcal{C}$–filtrazione strutturale* di E.

(5) Una categoria che gode delle proprietà b_1) e b_2) viene anche detta C_1 categoria ([3], p. 81).

Se E, F sono oggetti di $L\mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$–filtrazioni strutturali $(E_i)_{i\in I}$, $(F_j)_{j\in J}$ rispettivamente, un morfismo $u: E \to F$ in $L\mathcal{C}$ è un morfismo $u: E \to F$ in $\mathcal{E}$ con la proprietà che esista un'applicazione $\chi: I \to J$ ed un morfismo $u_i: E_i \to F_{\chi(i)}$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E_i) & \xrightarrow{\mathcal{F}(u_i)} & \mathcal{F}(F_{\chi(i)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow[u]{} & F \end{array}$$

sia commutativo.

La definizione non dipende dalle $\mathcal{C}$–filtrazioni strutturali considerate.

Si osservi ora che per ogni oggetto $E \in Ob\,\mathcal{C}$ si può considerare $\mathcal{F}(E)$ con la $\mathcal{C}$–filtrazione banale $(E_i = E)_{i\in I}$: dunque E può essere identificato con un oggetto di $L\mathcal{C}$. Poiché $\mathcal{F}$ è fedele, ne segue che $\mathcal{C}$ è una sottocategoria piena di $L\mathcal{C}$, tramite il funtore $\mathcal{H}: \mathcal{C} \to L\mathcal{C}$ definito da:

$\mathcal{H}(E) = \mathcal{F}(E)$ con la $\mathcal{C}$–filtrazione banale per ogni $E \in Ob\mathcal{C}$,

$\mathcal{H}(u) = \mathcal{F}(u)$ per ogni $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$.

Inoltre esiste un funtore fedele $\mathcal{G}: L\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ definito da:

$\mathcal{G}(E) = E$ per ogni $E \in Ob\,L\mathcal{C}$,

$\mathcal{G}(u) = u$ per ogni $u \in \mathrm{Hom}_{L\mathcal{C}}(E, F)$.

Il triangolo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathcal{H}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & L\mathcal{C} \arrow[dl, "\mathcal{G}"] \\ & \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

risulta allora commutativo.

TEOREMA 1.1. *Nella categoria* $L\mathcal{C}$ *esistono le somme ed il funtore* $\mathcal{G}$ *commuta con esse.*

2. LA CATEGORIA $QL\mathcal{C}$

Prima di definire la categoria $QL\mathcal{C}$ richiamiamo la nozione di epimorfismo stretto.

Un epimorfismo $s: E' \to E$ di una categoria $\mathcal{A}$ si dice stretto se, dato comunque un monomorfismo $a: X' \to X$ ed un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle b}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle c} \\ E' & \xrightarrow[s]{} & E \end{array}$$

esiste un morfismo $k: E \to X'$ tale che sia $ks = b$ e $ak = c$.

Ciò premesso, costruiamo la categoria $\mathrm{QL}\mathcal{C}$ come segue.

Un oggetto di $\mathrm{QL}\mathcal{C}$ è un oggetto $\mathrm{E} \in \mathrm{O}b\,\mathcal{E}$ munito di una coppia (E', s) dove $\mathrm{E}' \in \mathrm{O}b\,\mathrm{L}\mathcal{C}$ ed $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathrm{E}', \mathrm{E})$ è un epimorfismo stretto.

Un morfismo tra due oggetti E, F di $\mathrm{QL}\mathcal{C}$ è un morfismo $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ in $\mathcal{E}$ tale che esista in $\mathrm{L}\mathcal{C}$ un morfismo $u' : \mathrm{E}' \to \mathrm{F}'$ con la proprietà che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{F}' \arrow[d, "t"] \\ \mathrm{E} \arrow[r, "u"'] & \mathrm{F} \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Sia ora $\mathrm{E} \in \mathrm{O}b\,\mathrm{L}\mathcal{C}$; poiché id_{E} è un epimorfismo stretto, ogni oggetto E di $\mathrm{L}\mathcal{C}$ si identifica con un oggetto di $\mathrm{QL}\mathcal{C}$.

Dunque esiste un funtore $\mathcal{L} : \mathrm{L}\mathcal{C} \to \mathrm{QL}\mathcal{C}$ definito da:

$\mathcal{L}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ con la coppia $(\mathrm{E}, id_{\mathrm{E}})$ per ogni $\mathrm{E} \in \mathrm{O}b\,\mathrm{L}\mathcal{C}$.

$\mathcal{L}(u) = u$ per ogni $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{L}\mathcal{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Ne segue che $\mathrm{L}\mathcal{C}$ è una sottocategoria piena di $\mathrm{QL}\mathcal{C}$.

Inoltre esiste il funtore fedele $\mathcal{M} : \mathrm{QL}\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ così definito:

$\mathcal{M}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ per ogni $\mathrm{E} \in \mathrm{O}b\,\mathrm{QL}\mathcal{C}$,

$\mathcal{M}(u) = u$ per ogni $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{QL}\mathcal{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}\mathcal{C} \arrow[rr, "\mathcal{L}"] \arrow[dr, "\mathcal{G}"'] & & \mathrm{QL}\mathcal{C} \arrow[dl, "\mathcal{M}"] \\ & \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

è allora commutativo.

Teorema 2.1. *Nella categoria* $\mathrm{QL}\mathcal{C}$ *esistono i limiti induttivi dei funtori da una arbitraria categoria piccola ed il funtore* $\mathcal{M}$ *commuta con essi.*

Osservazione. Dualmente si definiscono le categorie $\mathrm{P}\mathcal{C}$ e $\mathrm{SP}\mathcal{C}$.

Bibliografia

[1] C. Andreian-Cazacu, A. Deleanu e M. Jurchescu, *Topologie, Categorii, Suprafete Riemanniene*. Ed. Acad. R.S. România, București 1966.

[2] M. Jurchescu, *Faisceaux sur un espace localement compact*. In corso di pubblicazione, « Rev. Roum. Math. Pures et Appl. ».

[3] B. Mitchell, *Theory of categories*. Ac. Press. New York, 1965.