
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

PLACIDO CICALA

Sulla elastodinamica delle strutture a guscio

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 56 (1974), n.3, p. 338–342.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_3_338_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sulla elastodinamica delle strutture a guscio.* Nota (*)
del Socio PLACIDO CICALA.

SUMMARY. — Formulations governing the free vibrations of shells are coordinated according to their foundations in the deduction from three-dimensional theory of elasticity by asymptotic procedures.

In un precedente studio sulle oscillazioni libere di un guscio cilindrico circolare ⁽¹⁾ sono state esaminate varie formulazioni fondate sull'impostazione asintotica. La presente Nota è volta ad una visione d'insieme delle formulazioni che per le oscillazioni libere di un guscio generico si deducono con la stessa impostazione asintotica dalla teoria elastica lineare. Introducendo un parametro δ di spessore, per $\delta \rightarrow 0$ la teoria si frammenta in trattazioni speciali, ciascuna definita dagli ordini di grandezza delle lunghezze di variazione (intervalli nodali) e del parametro di frequenza; ciò con guadagno notevole per la semplificazione dell'analisi e con una perdita nella sua generalità: di fatti per questa via l'indagine dinamica deve passare attraverso l'esame dei modi propri. Del resto le usuali trattazioni assiomatiche, per le loro ipotesi di base, come quella della conservazione delle normali, perdono anch'esse di generalità: sfuggono al loro esame i fenomeni dinamici che avvengono entro lo spessore. D'altra parte l'impostazione asintotica, aggruppando le varie teorie come facce di un poliedro, dà una visione del tutto completa dell'insieme. In questo indirizzo, qui si ricerca la classificazione generale delle varie formulazioni che poi, una volta esplicitate, converrà tradurre in opportune discretizzazioni, per sfruttare nelle applicazioni i poderosi strumenti del calcolo numerico oggi disponibili.

1. Sulla superficie media Σ del guscio si stabilisca un sistema di coordinate gaussiane ξ_a, ξ_b . Per brevità si scrive ∂_a, ∂_b per $\partial/\partial \xi_a, \partial/\partial \xi_b$. Lo spessore di parete si suppone costante o variabile più lentamente che le funzioni in esame; sia h un suo valore rappresentativo e sia $\delta = h/R$ il parametro che si approssima a zero mentre la lunghezza R di riferimento legata a Σ si mantiene fissa. Il materiale sia omogeneo, con densità γ_1 , isotropo ed elastico, con modulo E e coefficiente di Poisson ν . Detta ω la pulsazione delle oscillazioni armoniche in esame, sia $\Omega = \gamma_1 R^2 \omega^2 / E$.

Per il riferimento locale nel punto generico di Σ si assumono i versori t_a, t_b tangenti alle linee di curvatura e n normale a Σ : in direzione n si misura

(*) Presentata nella seduta del 9 marzo 1974.

(1) P. CICALA e F. ALGOSTINO, *Le vibrazioni libere del guscio cilindrico, banco di prova delle teorie bidimensionali delle strutture a guscio.* I Convegno AIMETA, Udine, 1971, p. 101-146. Per la bibliografia si rinvia a quella Nota.

la coordinata ζ . Detto \mathbf{u} lo spostamento, si definiscono le componenti medie

$$(1) \quad u_a = \frac{1}{h} \int u \cdot \mathbf{t}_a \, d\zeta \quad , \quad u_b = \frac{1}{h} \int u \cdot \mathbf{t}_b \, d\zeta \quad , \quad w = \frac{1}{h} \int u \cdot \mathbf{n} \, d\zeta.$$

Con i metodi del Rif. 7 (nota citata) si trova che le equazioni di equilibrio secondo $\mathbf{t}_a, \mathbf{t}_b, \mathbf{n}$, per l'elemento di parete corrispondente agli incrementi $d\xi_a, d\xi_b$ possono porsi simbolicamente nella forma

$$(2) \quad (\mathbf{A} + \Omega) \mathbf{U} + h^2 (\mathbf{B} + \Omega \mathbf{C}) \mathbf{U} + h^4 (\mathbf{D} + \Omega \mathbf{E} + \Omega^2 \mathbf{C}) \mathbf{U} + \dots = 0$$

dove \mathbf{U} è la colonna dei valori u_a, u_b, w e $\mathbf{A} \div \mathbf{E}$ sono matrici simmetriche 3×3 i cui elementi sono:

$$(3) \quad \begin{aligned} A_{11} = B_{11} = A_{22} = B_{22} = C_{33} = \partial^2 \quad , \quad A_{12} = B_{12} = C_{12} = \partial_a \partial_b \\ A_{13} = C_{13} = \partial_a \quad , \quad A_{23} = C_{23} = \partial_b \quad , \quad A_{33} = 1 \quad , \quad B_{i3} = C_{i3} \partial^2 \\ C_{11} = \partial_a^2 \quad , \quad C_{22} = \partial_b^2 \quad , \quad D_{ij} = E_{ij} \partial^2 \quad , \quad E_{ij} = C_{ij} \partial^2 \end{aligned}$$

con $i = j = 1, 2, 3$ e $\partial^2 = \partial_a^2 + \partial_b^2$. Le espressioni riportate, per ciascun gruppo di termini, indicano a meno dei rispettivi coefficienti, le derivate di ordine più alto: a queste seguono di regola addendi contenenti tutte le derivate di ordine inferiore, pari o dispari. Sempre limitatamente alla ricerca delle derivate più alte, si può sviluppare il determinante del sistema come se gli operatori ∂ fossero semplici fattori. Si ha così l'equazione risultante sulla forma

$$(4) \quad \sum k h^n \partial_a^a \partial_b^b \Omega^c w = 0$$

essendo $h \approx \delta^0$ un fattore assegnato per ciascun termine. In uno spazio S_4 di coordinate n, a, b, c per ciascun termine della sommatoria (4) si traccia un punto: diremo \mathbb{R} l'insieme di questi punti. La fig. 1 è una rappresentazione prospettica delle sezioni $n = 0, 2, 4$ nello spazio S_3 di coordinate a, b, c . Le espressioni (3) permettono di individuare il contorno del luogo dei punti \mathbb{R} nei tre casi. I punti $n = 0$ appartengono al poliedro di vertici $OA_0 B_0 C_0 D_0 E_0$; in figura sono segnati solo i punti situati sugli spigoli punteggiati. Il poliedro $OA_2 B_2 C_0 D_2 E_2$ a spigoli tratteggiati e quello a linea continua $OA_4 B_4 C_4 D_4 E_4$ contengono i punti $n = 2, n = 4$.

2. Se $\delta^a, \delta^b, \delta^c$ sono rispettivamente gli ordini di grandezza delle lunghezze di variazione secondo le coordinate ξ_a, ξ_b e della quantità $1/\Omega$, l'ordine di grandezza δ^μ del termine generico della (4) è definito dalla relazione

$$(5) \quad \mu = n - \alpha a - \beta b - \gamma c.$$

Per dati valori di α, β, γ si dovrà trovare in \mathbb{R} un punto K a cui corrisponda per la (5) un valore μ_K tale che per ogni altro punto si risulti $\mu \geq \mu_K$. Diremo punti di contatto quelli per cui è $\mu = \mu_K$: essi rappresentano i termini fondamentali nell'equazione risultante per la teoria definita dalla terna α, β, γ . Le terne per le quali il contatto si riduce ad un punto sono di regola da scar-

tare; l'esperienza numerica nel caso del cilindro circolare (nota citata) mostra che hanno più vasto campo di validità le teorie per le quali l'iperpiano $\mu = \mu_K$ contiene più punti di \mathfrak{R} .

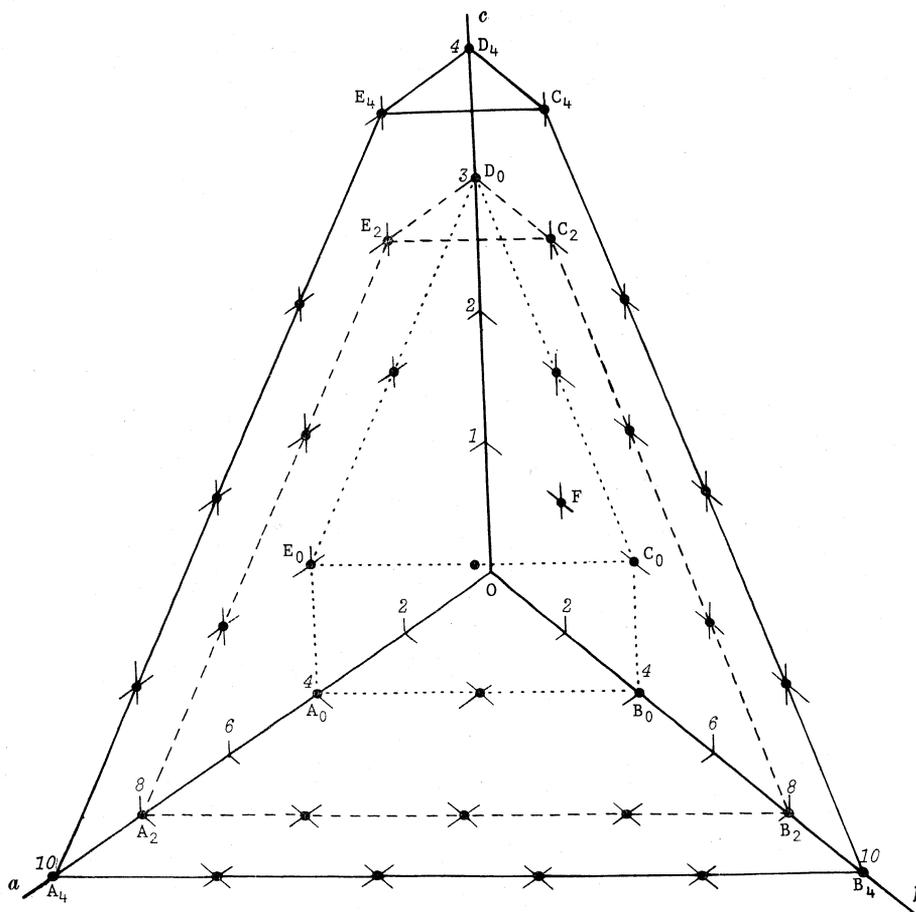


Fig. 1.

Per $\alpha = \beta = 0$, $\gamma < 0$ si ha contatto nel piano $c = 0$ dello spazio $n = 0$: vi corrisponde la teoria statica (o quasi) degli stati membranale e inestensionale. Con $\alpha = \beta = \gamma = 0$ entrano nell'equazione risultante tutti i termini di (4) con $n = 0$: l'equazione, di 3° grado in Ω , ma di 4° ordine in ∂_a, ∂_b richiede l'intervento di soluzioni a variazione rapida perché possano soddisfarsi le 4 condizioni prescritte per ciascun punto del contorno del guscio. Per altre terne α, β, γ l'iperpiano $\mu = \mu_K$ interseca gli spazi $n = \text{costante}$ secondo piani paralleli. Detti i_a, i_b, i_c gli intercetti sui tre assi a, b, c e Δi_a la variazione di i_a fra spazi successivi si ha

$$i_a : i_b : i_c = \beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta \quad , \quad \Delta i_a = 2/\alpha .$$

Appare quindi immediata dalla fig. 1 l'esistenza dei poligoni di contatto $E_0 C_0 D_0$, $A_2 B_2 C_2 E_2$, $A_4 B_4 C_4 E_4$: ad essi corrisponde $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$. Si avrebbe in questo caso un numero illimitato di termini nell'equazione risultante: cade in difetto la riduzione al problema bidimensionale, a meno che, con troncamenti più o meno assiomatici si restringa la considerazione ad alcuni dei modi possibili di spostamento entro lo spessore.

Rientrano invece propriamente nella teoria del guscio le trattazioni desunte dalle figure di contatto $A_0 B_0 C_0 E_0$, $E_0 C_0 D_0$. Nel primo caso si ha $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$. Volendo che il contatto si estenda al segmento $A_2 B_2$ si deve porre $\alpha = 1/2$: si giunge così alla teoria delle soluzioni a variazione rapida con parametro di frequenza $\Omega \approx \delta^0$. Nel secondo caso il contatto resta limitato al triangolo $E_0 C_0 D_0$ per $\alpha < 1$; con $\alpha = 1/2$ l'intersezione con lo spazio $n = 2$ passa per i punti $A_4 B_4 C_4 E_4$ e quindi i termini relativi al trapezio $A_2 B_2 C_2 E_2$ risultano piccoli come δ rispetto ai termini $n = 0$. Mentre nel caso $\alpha = \beta = 1/2$, $\gamma = 0$ l'equazione risultante è di 8° ordine e quindi esauriente nei riguardi delle condizioni al contorno, nel caso $\alpha = \beta = 1/2$, $\gamma = 1$ si ha un'equazione del 4° ordine: la teoria delle oscillazioni con $\Omega \approx \delta^{-1}$ va completata con la trattazione per $\alpha = \beta = 3/4$, con piani rappresentativi contenenti il tratto $E_0 C_0$ nello spazio $n = 0$ e $A_2 B_2$ nello spazio $n = 2$.

Oltre a queste che si presentano come le teorie fondamentali, altre si possono costruire con variazione anisotropa ($\alpha \neq \beta$): per queste trattazioni conviene adottare un riferimento meno particolare del gaussiano; tuttavia i caratteri essenziali di questi «effetti di orlo» possono desumersi dalla stessa fig. 1. Situazioni particolari si manifestano quando la figura nel piano $n = c = 0$ sia incompleta: l'esempio più importante al riguardo è quello del guscio cilindrico.

3. Se la superficie Σ è cilindrica e su di essa si misura la coordinata ξ_a secondo le generatrici e ξ_b in direzione ortogonale, i termini della (4) con $n = c = 0$ si riducono all'addendo contenente ∂_a^4 , rappresentato dal punto A_0 nella fig. 1. Deve aggiungersi in questo caso alle teorie prima menzionate quella che contiene tra i fondamentali i termini rappresentati da A_0 , C_0 e F : si ha quindi $\beta = 0$, $\gamma = 4\alpha$. Perché il piano parallelo nello spazio $n = 2$ contenga il segmento OB_4 deve essere $\alpha = -1/2$: la lunghezza d'onda nella direzione delle generatrici deve essere grande come $\delta^{-1/2}$ rispetto a R . La teoria non è applicabile se il cilindro non ha adeguata lunghezza.

4. Per esemplificazione si riportano i sistemi di seconda approssimazione per il guscio cilindrico nel caso $\Omega \approx \delta^{-1}$. Sia $R = 1/\rho$ il raggio del cilindro medio; siano σ_a , σ_b , σ_n le tensioni normali nelle direzioni t_a , t_b , n e τ la tensione tangenziale parallela a Σ , tutte riferite ad E . Sia

$$(6) \quad h_2 = \frac{h^2}{12} \quad , \quad \beta_n = \frac{12}{h^3} \int_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \zeta \, d\zeta.$$

Con $\alpha = \beta = 1/2$ si ha il sistema

$$\begin{aligned}
 & \sigma_a - \nu \sigma_a - \partial_b u_a = \nu \sigma_n \\
 & \sigma_b - \nu \sigma_a - \partial_b u_b = \nu \sigma_n + \rho w \\
 (7) \quad & 2(1 + \nu) \tau - \partial_a u_b - \partial_b u_a = 0 \\
 & \partial_a \sigma_a + \partial_b \tau + \rho^2 \Omega u_a = 0 \quad , \quad \partial_b \sigma_b + \partial_a \tau + \rho^2 \Omega u_b = 0 .
 \end{aligned}$$

Trascurando i termini a II membro si ha il sistema di I approssimazione con errori relativi $\approx \delta$: tenendo conto di essi con l'aiuto delle equazioni

$$(8) \quad \beta_n + \nu \sigma_a + \nu \sigma_b = 0 \quad , \quad \sigma_n = \rho^2 \Omega h_2 \beta_n \quad , \quad \rho \Omega w = \sigma_b$$

l'errore relativo si riduce all'ordine di δ^2 . L'equazione risultante è

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & (1 - \nu) \tilde{\omega} [\nabla^4 + (3 - \nu) \tilde{\omega} \nabla^2 + 2(1 - \nu) \tilde{\omega}^2] = \\
 & = \rho^2 (1 - \nu^2) \partial_a^4 - \rho^2 \nabla^4 - 2\rho^2 \tilde{\omega} (\partial_b^2 + \nu^2 \partial_a^2) + \nu^2 h_2 \tilde{\omega}^2 (\nabla^4 + 2\tilde{\omega} \nabla^2)
 \end{aligned}$$

dove $\tilde{\omega} = \rho^2 (1 + \nu) \Omega$, $\nabla^2 = \partial_a^2 + \partial_b^2$. I termini fondamentali sono scritti a I membro: essi sono rappresentati da punti del triangolo $E_0 C_0 D_0$,

Del sistema relativo al caso $\alpha = \beta = 3/4$, $\gamma = 1$ per brevità riportiamo solo l'equazione risultante:

$$(10) \quad (1 - \nu) \tilde{\omega} - h_2 \nabla^4 = (3, 4 - 1, 4\nu) h_2 \tilde{\omega} \nabla^2.$$

I termini a I membro sono i fondamentali: a meno di un fattore ∇^4 , essi sono rappresentati da $E_0 C_0$ e $A_2 B_2$. Il II membro è di ordine $\delta^{1/2}$ rispetto ad essi; l'errore residuo è $\approx \delta$. Si osserva che le (9) e (10) ridotte ai termini fondamentali valgono a rappresentare rispettivamente le oscillazioni estensionali e flessionali della parete piana.